Vers le Bac

MATHEMATIQUES

4ème

CORRIGES

Section

Mathématiques

TOME 1

ANALYSE

BEN CHERIFA Ibrahim

AMARI Hedi

Manque 287-318 p

PREFACE

Cet ouvrage a été conçu pour être, durant toute l'année scolaire , un outil de travail complet pour les élèves des classes terminales section mathématiques.

Il se compose de onze chapitres.

Chaque chapitre comporte :

- ⇨ *Un rappel de cours (Résultats à retenir).*
- ⇨ *Des exercices classés par difficulté croissante bien choisis.*
- ⇨ *Les Solutions détaillées de ces exercices*

Cet ouvrage, qui est conforme au nouveau programme a pour but la préparation intensive au Baccalauréat.

Enfin , Nous tenons à remercier Mr Gafsia Salahedine qui a mis tant de soin à l'édition de cet ouvrage.

Les auteurs

AMARI Hédi & BEN CHERIFA Brahim

CONTINUITE ET LIMITES

Résultats à retenir :

- Toute fonction polynôme est continue en tout réel .
- Toute fonction rationnelle est continue en tout réel de son ensemble de définition .
- Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont continues en tout réel .
- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf peut-être en un réel a de I .

  S'il existe une fonction g définie sur I , continue en a et telle que $g(x)=f(x)$ pour tout $x \neq a$, alors $\lim_{x \to a} f(x) = g(a)$.

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

- Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est continue en un réel a de I , si et seulement si , $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
- Si $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ est infinie , alors C_f admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.
- Si $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors C_f admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{i})$ au voisinage de $+\infty$.
- Si $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ($a \in \mathbb{R}^*$) alors deux cas peuvent se présenter selon $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$.
- Si $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b$($b \in \mathbb{R}$)alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.
- Si $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$ est infinie alors la droite d'équation $y = ax$ est une direction asymptotique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

- Soit u et v deux fonctions . soit a , b et c finis ou infinis .
  Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} v(x) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} v \circ u(x) = c$
- Soit f , u et v trois fonctions définies sur un intervalle I sauf peut-être en un réel a de I .
  Soit deux réels ℓ et ℓ' .
  - Si u(x) $\leq$ v(x) pour tout x $\neq$ a et si $\lim\limits_{a} u = \ell$ et $\lim\limits_{a} v = \ell'$

    alors $\ell \leq \ell'$.
  - Si u(x) $\leq f(x) \leq$ v(x) pour tout x $\neq$ a et si $\lim\limits_{a} u = \lim\limits_{a} v = \ell$

    alors $\lim\limits_{a} f = \ell$.

  Les résultats énoncés ci-dessous restent valables lorsque l'on considère des limites à l'infini , à droite en a ou à gauche en a .
- Soit f et u deux fonctions définies sur un intervalle I sauf peut être en un réel a de I .
  - Si $f(x) \geq u(x)$ pour tout x $\neq$ a et si $\lim\limits_{x \to a} u = +\infty$, alors

    $\lim\limits_{a} f = +\infty$.
  - Si $f(x) \leq u(x)$ pour tout x $\neq$ a et si $\lim\limits_{x \to a} u = -\infty$, alors

    $\lim\limits_{a} f = -\infty$.

  Ces résultats restent valables lorsque l'on considère des limites à l'infini, à droite en a ou à gauche en a.
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

<u>Théorème des valeurs intermédiaires</u>

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .
Soit a et b deux réels de I tels que a < b .
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ possède au moins une solution dans l'intervalle [a , b] .
En particulier , si $f(a) \cdot f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans] a, b[.

- Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I .
  Soit a et b deux réels de I tel que a < b. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = $ k admet une unique solution dan s[a ,b] .
- Soit f une fonction continue sur un intervalle I .
  Si la fonction f ne s'annule en aucun point de I alors elle garde un signe constant sur I .
- L'image d'un intervalle fermé borné [a ,b] par une fonction continue est un intervalle fermé borné [m ,M] .
  - Le réel m est le minimum de f sur [a , b] .
  - Le rée M est le maximum de f sur [a , b] .
- Soit f une fonction définie sur un intervalle de type [a , b[(b fini ou infini) .
  - Si la fonction f est croissante et majorée alors f possède une limite finie en b .
  - Si la fonction f es croissante et non majorée alors f possède une limite finie en b .
- Soit f une fonction définie sur un intervalle de type] a , b] (a fini ou infini) . ù
  - Si la fonction f est décroissante et minorée alors f possède une limite finie en a .
  - Si la fonction f est décroissante et non minorée alors f tend vers $-\infty$ en a .
- L'image d'un intervalle I par une fonction continue et monotone sur I est un intervalle de même nature .

EXERCICES

Exercice 1 :

Calculer les limites

1°/ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$ 2°/ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cos(x-1)-1}{x^2+2x-3}$

3°/ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^3+x}$ 4°/ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

5°/ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{E(x)}{x+1}$ où E(x) désigne la partie entière de x

6°/ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{tgx - 1}{2\sin x - \sqrt{2}}$

7°/ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) tg\, x$

Exercice 2 :

Calculer les limites suivantes si elles existent :

1°/ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ 2°/ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{x-1}$.

3°/ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3+x^2}}{x-1}$ 4°/ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{|x|\cdot|x-2|}{x(x^2-x-2)}$

5°/ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$

Exercice 3 :

Calculer les limites suivantes :

1°/ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2+x-3}{x^2+ax}$ où $a \in \mathbf{R}$.

2°/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x-5}}{2x}$ 3°/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3x^2+x-1}+x$

4°/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-mx$, où m est un paramètre réel.

Exercice 4 :

Calculer les limites :

1°/ $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{\dfrac{\sin x}{x}}$ 2°/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+\sin 2x}{\sin x-\sin 2x}$ 3°/ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin x}{5\cos^2 x+\sin^2 x-4\cos x}$

4°/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sin^2 x}{2+\sin x}$ 5°/ $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 6°/ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(ax)-\sin(x^2)}{a-x}$

Exercice 5 :

$$\text{Soit } f(x)=\begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x<0 \\ -2x^2 & \text{si } 0\le x<\frac{1}{\pi} \\ x^2(\cos(\frac{1}{x})-1) & \text{si } x\ge\frac{1}{\pi}\end{cases}$$

1°/ Déterminer $\lim\limits_{-\infty} f$ et $\lim\limits_{+\infty} f$.

2°/ Etudier la continuité de f .

Exercice 6 :

$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$$x\mapsto\begin{cases} 3\sqrt{4x^2+2x+1}+2x-3 & \text{si } x\le0 \\ x(x-\frac{\pi}{4}) & \text{si } 0<x<\frac{\pi}{4} \\ \dfrac{-\cos x+\sin x+2}{3x+1} & \text{si } x\ge\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

1°/ a) Déterminer $\lim\limits_{-\infty} f$.

b) Montrer que $\forall\ x \geq \frac{\pi}{4}$; $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x}$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2°/ Etudier la continuité de f en $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 7 :

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(mx^2)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

m étant un paramètre réel non nul.

1°/ Prouver que f_m est une fonction impaire.

2°/ Prouver que f_m est continue sur **R**.

3°/ Calculer $\lim\limits_{-\infty} f_m$ et $\lim\limits_{+\infty} f_m$.

Exercice 8 :

Soit $m \in \mathbf{R}^*$ et $f_m : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto m\sqrt{x^2 - m} + 2x$$

1°/ Préciser le domaine de définition de f_m.

2°/ Calculer $\lim\limits_{-\infty} f_m$ et $\lim\limits_{+\infty} f_m$.

Exercice 9 :

Soit la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 + 3x + 1 & si\ x \geq 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & si\ x < 0 \end{cases}$$

1°/ Déterminer le domaine de définition de f.

2°/ Calculer les limites éventuelles de f respectives en $+\infty$ et en $-\infty$.

3°/ Etudier la continuité de f en 0.

Exercice 10 :

Soit la fonction f définie par $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=1+\sqrt{x} & si\ \ x>0\ . \\ f(x)=-1-\sqrt{-x} & si\ \ x<0 \end{cases}$

1°/ Préciser le domaine de définition de f.

2°/ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3°/ Etudier la continuité de f en 0.

Exercice 11 :

Soit a un paramètre réel et f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=x^3+2ax+1 & si\ x\geq 1 \\ f(x)=ax^2+3x & si\ x<1 \end{cases}$$

1°/ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2°/a) Calculer $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$.

b) Déterminer a pour que f soit continue en 1.

Exercice 12 :

$f_m(x) = \sqrt{x^2+x+1}$ - m x où m est un paramètre réel

1°/ Montrer que $Df_m = \mathbb{R}$

2°/ Montrer que f_m est continue sur $\mathbb{R}$

3°/ Calculer suivant m , la limite de f_m en $+\infty$

4°/ Dans quel cas , la courbe Cf_m admet au voisinage de $+\infty$, une asymptote horizontale

5°/ Etudier le comportement de f au voisinage de $+\infty$

Exercice 13 :

$$f(x) = \frac{2x + \cos x}{x + 1}$$

1°/ Df

2°/ Calculer les limites de f à gauche et à droite de (-1) . Interpréter

3°/

a) Montrer que pour tout x > -1 on a :

$$\frac{2x - 1}{x + 1} \leq f(x) \leq \frac{2x + 1}{x + 1}$$

b) Calculer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f$. Interpréter

4°/ Etudier la position de Cf par rapport à Δ : y = 2

5°/ Calculer $\lim\limits_{-\infty} f$

Exercice 14 :

$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x} \; pour\ x > 0 \\ \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} \; pour\ x < 0 \end{cases}$$

1°/ Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 .

2°/ Ecrire le prolongement f_1 de f

3°/ Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f$. Interpréter géométriquement .

Exercice 15 :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} & \text{pour } x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{\sqrt{x}} & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

1°/ Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f$. Interpréter

2°/ a) Montrer que pour tout x > 0 on a : $\frac{-2}{\sqrt{x}} \leq f(x) \leq 0$

b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f$. Interpréter

3°/ Montrer que f est continue en 0

Exercice 16 :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2}{2x+1} & \text{pour } x \leq 0 \\ \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

1°/Montrer que f est continue en 0

2°/a)Montrer que Cf admet au voisinage de $-\infty$ un asymptotes oblique Δ

b) Etudier la position de Cf et Δ sur $\mathbb{R}^-$

3°/Calculer la limite de f en $+\infty$ interpréter .

SOLUTIONS

Solution 1 :

1°/ On a : $x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1}(x+4) = 5$$

2°/ On pose $X = x - 1$ lorsque $x \to 1$ alors $x \to 0$

d'où $\lim_{x \to 1} \frac{\cos(x-1) - 1}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos X - 1}{X(X+4)} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{X+4} \cdot \frac{1 - \cos X}{X} = 0$

3°/ $\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos X}{X^2} = \frac{1}{2}$

4°/ On a : $E(x) \leq x \leq E(x) + 1 \Rightarrow x - 1 < E(x) \leq x$

Pour $x > 0$ on a : $x + 1 > 0$ d'où

$$\frac{x-1}{x+1} < \frac{E(x)}{x+1} \leq \frac{x}{x+1}$$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ D'où : $\lim_{x \to +\infty} \frac{E(x)}{x+1} = 1$

Solution 2 :

1°/ $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1) \cdot (\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+3) - 4}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{(x-1) \cdot (\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} = \frac{1}{4}$

2°/ $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x+1}}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{2x+1})(\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+1})}{(x-1)(\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+1})}$

$$= \lim_{x\to1} \frac{(x+2)-(2x+1)}{(x-1)(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1})} = \lim_{x\to1} \frac{-(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1})}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{-1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}} = \frac{-1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} = \frac{-1}{2\sqrt{3}}.$$

3°/ $$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3+x^2}}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3+x^2})(\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3+2})}{(x-1)(\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3+x^2})}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{1-x^2}{(x-1)(\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3+x^2})} = \lim_{x\to1} \frac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3+x^2})}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{-(x+1)}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3+x^2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

4°/ • On a : $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$ et lorsque $x\to2^+$,

$|x-2|=x-2$ et $|x|=x$ donc

$$\lim_{x\to2^+} \frac{|x|\cdot|x-2|}{x(x^2-x-2)} = \lim_{x\to2^+} \frac{x(x-2)}{x(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to2^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3}.$$

Lorsque $x\to2^-$, $|x-2|=-(x-2)$ et $|x|=x$ donc

$$\lim_{x\to2^-} \frac{|x|\cdot|x-2|}{x(x^2-x-2)} = \lim_{x\to2^-} \frac{-x(x-2)}{x(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to2^-} \frac{-1}{x+1} = \frac{-1}{3}.$$

on a : $\lim_{x\to2^-} \frac{|x|\cdot|x-2|}{x(x^2-x-2)} \neq \lim_{x\to2^+} \frac{|x|\cdot|x-2|}{x(x^2-x-2)}$ donc la fonction

$x \mapsto \frac{|x|\cdot|x-2|}{x(x^2-x-2)}$ n'admet pas de limite lorsque $x\to2$.

5°/ $$\lim_{x\to0} \frac{x^2+|x|}{x^2-|x|} = \lim_{x\to0} \frac{|x^2|+|x|}{|x^2|-|x|} = \lim_{x\to0} \frac{|x|(|x|+1)}{|x|\cdot(|x|-1)} = \lim_{x\to0} \frac{|x|+1}{|x|-1} = -1.$$

Solution 3 :

1°/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+x-3}{x^2+ax} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2$.

2°/ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2x-5}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2})}}{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}}{2x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}}{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{1}{2}\sqrt{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{x^2}} = -\dfrac{1}{2}$.

3°/ $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{3x^2+x-1}+x = \lim\limits_{x\to-\infty} |x|\sqrt{3+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+x$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} -x\sqrt{3+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+x = \lim\limits_{x\to-\infty} x(1-\sqrt{3+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}) = +\infty$ car

$\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\sqrt{3+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}} = 1-\sqrt{3} < 0$

4°/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-mx = \lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-m)$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-m = 1-m$

- Si $m<1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-mx = +\infty$
- Si $m>1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-mx = -\infty$
- Si $m=1$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x(1+\frac{1}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \dfrac{1}{2}$

Solution 4 :

1°/ $\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{\sin x}{x}}=\sqrt{1}=1$.

2°/ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 2x}{\sin x-\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 2x}{x}}{\frac{\sin x}{x}-\frac{\sin 2x}{x}}=\frac{1+2}{1-2}=-3$

(car $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b}$).

3°/ on a : $5\cos^2 x+\sin^2 x-4\cos x=5\cos^2 x+1-\cos^2 x-4\cos x$

$=4\cos^2 x-4\cos x+1=(2\cos x-1)^2$ donc :

$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{5\cos^2 x+\sin^2 x-4\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{(2\cos x-1)^2}=+\infty$ car $\sin\frac{\pi}{3}>0$

et $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(2\cos x-1)^2=0^+$.

4°/ On a, d'une part $\forall x\in\mathbf{R}, -1\le\sin x\le 1 \Rightarrow 1\le 2+\sin x\le 3 \Rightarrow$

$\frac{1}{3}\le\frac{1}{2+\sin x}\le 1$ **(1)**

et d'autre part : $-1\le-\sin^2 x\le 0\Rightarrow x-1\le x-\sin^2 x\le x$ **(2).**

En multipliant les 2 encadrements (1) et (2) on obtient : $\forall x>1$

$\frac{x-1}{3}\le\frac{x-\sin^2 x}{2+\sin x}\le x \Rightarrow\forall x>1, \frac{x-1}{3}\le\frac{x-\sin^2 x}{2+\sin x}$ or

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{3}=+\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sin^2 x}{2+\sin x}=+\infty$.

5°/ Posons $X = \frac{1}{x}$. Lorsque $x \to +\infty$ alors $X \to 0^+$ d'où

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{X\to 0^+} \frac{\sin X}{X} = 1.$$

6°/ $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin(ax) - \sin(x^2)}{a - x} = \lim\limits_{x\to a} \frac{\sin(x^2) - \sin(ax)}{x - a}$.

Posons $h(x) = \sin(x^2) - \sin(ax)$. On a : $h(a) = 0$ d'où :

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin x^2 - \sin a^2}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = h'(a) \text{ (car } h \text{ est dérivable sur } \mathbf{R}).$$

Or $h'(x) = 2x\cos(x^2) - a\cos(ax)$ d'où $h'(a) = a\cos(a^2)$.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin(ax) - \sin(x^2)}{a - x} = a\cos(a^2)$.

Solution 5 :

1°/ • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot\sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{X\to 0^-} \frac{1}{X}\sin X = \lim\limits_{X\to 0^-} \frac{\sin X}{X} = 1$

($X = \frac{1}{x}$, quand $x \to -\infty$ alors $X \to 0^-$).

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(\cos(\frac{1}{x}) - 1)$. On pose $X = \frac{1}{x}$; quand

$x \to +\infty$ alors $X \to 0^+$

alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\,[\cos(\frac{1}{x}) - 1] = \lim\limits_{X\to 0^+} \frac{1}{X^2}(\cos X - 1) = \lim\limits_{X\to 0^+} \frac{\cos X - 1}{X^2} = \frac{-1}{2}$.

2°/ $x \mapsto x\sin(\frac{1}{x})$ est continue sur $\mathbf{R}^*$ (produit et composée de fonctions continues) alors f est continue sur $]-\infty, 0[$.

• $x \mapsto -2x^2$ est continue sur $\mathbf{R}$ (fonction polynôme) donc f est continue sur $]0, \frac{1}{\pi}[$.

- $x \mapsto x^2(\cos(\frac{1}{x})-1)$ est continue sur $\mathbf{R}^*$ (produit et composée de

fonctions continues) donc f est continue sur $]\frac{1}{\pi}, +\infty[$.

Continuité de f en $x_0 = 0$:

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x\sin(\frac{1}{x})$.

On a : $\forall\ x<0\ :\ -1 \le \sin(\frac{1}{x}) \le 1$ d'où $x \le x\sin(\frac{1}{x}) \le -x$

Et comme $\lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}(-x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} -2x^2 = 0$

on a : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ donc f est continue en $x_0 = 0$.

Continuité de f en $x_0 = \frac{1}{\pi}$:

$$\lim_{x\to \frac{1}{\pi}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{1}{\pi}^-} -2x^2 = \frac{-2}{\pi^2}$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{\pi}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{1}{\pi}^+} x^2(\cos(\frac{1}{x})-1) = \frac{1}{\pi^2}(\cos\pi - 1) = \frac{-2}{\pi^2}$$

$\lim\limits_{x\to \frac{1}{\pi}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1}{\pi}^+} f(x) = f(\frac{1}{\pi})$ donc f est continue en $x_0 = \frac{1}{\pi}$.

Conclusion : f est continue sur $\mathbf{R}$.

Solution 6 :

1°/a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} 3\sqrt{4x^2+2x+1}+2x-3$

$$= \lim_{x\to -\infty} 3\sqrt{x^2(4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}+2x-3 = \lim_{x\to -\infty} 3|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+2x-3$$

$$= \lim_{x\to -\infty} -3x\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+2x-3 = \lim_{x\to -\infty} x(-3\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+2-\frac{3}{x}) = +\infty$$

b) • On a : $\forall x \in [\frac{\pi}{4}, +\infty[$, $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq -\cos x \leq 1$

donc $-2 \leq -\cos x + \sin x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 2 - \cos x + \sin x \leq 4$

d'autre part on a : $\forall x \in [\frac{\pi}{4}, +\infty[$, $3x+1 > 0$ donc $\forall x \in [\frac{\pi}{4}, +\infty[$, $f(x) \geq 0$

• On a : $\forall x \in [\frac{\pi}{4}, +\infty[$, $2 - \cos x + \sin x \leq 4 \Rightarrow \dfrac{2-\cos x + \sin x}{3x+1} \leq \dfrac{4}{3x+1}$

or $\dfrac{4}{3x+1} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{-(2x+2)}{x(3x+1)} \leq 0$ car $x \in [\frac{\pi}{4}, +\infty[$ d'où $\forall x \in [\frac{\pi}{4}, +\infty[$, $f(x) \leq \dfrac{2}{x}$.

Conclusion : $\forall x \in [\frac{\pi}{4}, +\infty[$, $0 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{x}$.

• On a : $\forall x \in [\frac{\pi}{4}, +\infty[$, $0 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2°/• $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^-} x(x - \frac{\pi}{4}) = 0$

• $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^+} \dfrac{-\cos x + \sin x + 2}{3x+1} = \dfrac{2}{3 \cdot \frac{\pi}{4} + 1}$

$f(\frac{\pi}{4}) = \dfrac{2}{\frac{3\pi}{4} + 1}$ donc f n'est pas continue à gauche en $\frac{\pi}{4}$, et f est continue à droite en $\frac{\pi}{4}$.

Solution 7 :

1°/ Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a : $(-x) \in \mathbf{R}$ et $f_m(-x) = -f_m(x)$ donc f_m est impaire.

2°/ La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(mx^2)}{x}$ est continue sur $\mathbf{R}^*$ comme composée et produit de fonctions continues sur $\mathbf{R}^*$: $x \mapsto \sin(mx^2)$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

• $\lim\limits_{x \to 0} f_m(x) = \lim\limits_{x \to 0} x \dfrac{\sin(mx^2)}{x^2}$

$\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(mx^2)}{x^2} = \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\sin(mX)}{X} = m$

donc $\lim_{x\to 0} f_m(x) = 0\cdot m = 0 = f_m(0)$ d'où f_m est continue en 0.

Conclusion : f_m est continue sur $\mathbf{R}$.

3°/ $\forall x \in \mathbf{R}$, $-1 \le \sin(mx^2) \le 1$ donc pour tout $x<0$ on a :

$\frac{1}{x} \le f_m(x) \le \frac{-1}{x}$ et comme $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{x} = 0$ alors $\lim_{x\to-\infty} f_m(x) = 0$.

- $\forall\, x>0$, $\frac{-1}{x} \le f_m(x) \le \frac{1}{x}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f_m(x) = 0$.

Solution 8 :

1°/ $D_{f_m} = \{\, x \in \mathbf{R}$ tel que $x^2 - m \ge 0 \,\}$

(*) $x^2 - m = 0 \Leftrightarrow x^2 = m$.

- Si $m>0$ (*) admet deux solutions $x' = \sqrt{m}$ et $x'' = -\sqrt{m}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{m}$		$\sqrt{m}$		$+\infty$
$x^2 - m$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_{f_m} =]-\infty, -\sqrt{m}] \cup [\sqrt{m}, +\infty[$.

- Si $m<0$: $x^2 - m > 0$; $D_{f_m} = \mathbf{R}$.

2°/ $\lim_{x\to-\infty} m\sqrt{x^2 - m} + 2x = \lim_{x\to-\infty} m|x|\sqrt{1 - \frac{m}{x^2}} + 2x$

$$= \lim_{x\to-\infty} x(-m\sqrt{1 - \frac{m}{x^2}} + 2)$$

- $\lim_{x\to-\infty} x = +\infty$

- $\lim_{x\to-\infty} -m\sqrt{1 - \frac{m}{x^2}} + 2 = -m + 2$

m	$-\infty$		2		$+\infty$
$-m+2$		$+$	0	$-$	

$-$ Si $m<2 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f_m(x) = +\infty$

$-$ Si $m>2 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f_m(x) = -\infty$

$$- \text{Si } m=2 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} 2\sqrt{x^2-2}+2x = \lim_{x\to-\infty} \frac{4(x^2-2)-4x^2}{(2\sqrt{x^2-2}-2x)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2-2}-x} = 0$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} m\sqrt{x^2(1-\frac{m}{x^2})}+2x = \lim\limits_{x\to+\infty} mx\sqrt{1-\frac{m}{x^2}}+2x$

$$= \lim_{x\to+\infty} x[m\sqrt{1-\frac{m}{x^2}}+2]$$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} m\sqrt{1-\frac{m}{x^2}}+2=m+2$

m	$-\infty$		-2		$+\infty$
$m+2$		$-$	0	$+$	

$- \text{Si } m<-2$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)=-\infty$

$- \text{Si } m>-2$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)=+\infty$

$- \text{Si } m=-2$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-2\sqrt{x^2+2}+2x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2-4(x^2+2)}{2x+2\sqrt{x^2+2}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{x+\sqrt{x^2+2}} = 0$$

Solution 9 :

1°/• La fonction $x \mapsto x^2+3x+1$ est définie sur **R** et en particulier sur $[0,+\infty[$.

• La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est définie sur $\mathbf{R}^*$ et en particulier sur

$]-\infty,0[$ donc D_f=**R**.

2°/• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 3x + 1 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.

• on a : $\forall x \in \mathbf{R}$, $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc $\forall x \in \mathbf{R}_-^*$, $\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq -\frac{1}{x}$ et

comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} -\frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

3°/• $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 + 3x + 1 = 1$.

• $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$.

donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$ et par suite f est continue en 0.

Solution 10 :

1°/ $D_f = \mathbf{R}$.

2°/• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -1 - \sqrt{-x} = -\infty$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \sqrt{x} = +\infty$.

3°/• $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 + \sqrt{x} = 1 = f(0)$ donc f est continue à droite en 0.

• $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} -1 - \sqrt{-x} = -1 \neq f(0)$ donc f n'est pas continue

à gauche en 0 et par conséquent f n'est pas continue en 0.

Solution 11 :

1°/• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^2 + 3x = \begin{cases} -\infty & si \ a = 0 \\ +\infty \ si & a > 0 \\ -\infty \ si & a < 0 \end{cases}$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 + 2ax + 1 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.

2°/a) • $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^3 + 2ax + 1 = 2a + 2$.

• $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} ax^2 + 3x = a + 3$.

b) f est continue en 1 ssi $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow$

$2a + 2 = a + 3 \Leftrightarrow a = 1$.

Solution 12 :

1°/On a : pour tout $x \in \mathbb{R}$: $x^2 + x + 1 > 0$ ($\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$)

D'où : $Df_m = \mathbb{R}$

2°/$P(x) = x^2 + x + 1$

P est une fonction polynôme donc P est continue sur $\mathbb{R}$

et comme pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P(x) > 0$ alors $\sqrt{P}$ est continue sur $\mathbb{R}$

$Q(x) = mx$

Q est une fonction polynôme alors Q est continue sur $\mathbb{R}$

On a : $f = \sqrt{P} - Q$ d'où f est continue sur $\mathbb{R}$

$$3°/ \lim_{+\infty} f = \lim_{+\infty} \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} - mx = \lim_{+\infty}\left(x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - mx\right)$$

$$= \lim_{+\infty} x\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} - m\right)$$

On a : $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - m = 1 - m \end{cases}$

m	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-m$	+	0	-

Pour $m < 1$: $\lim_{+\infty} f = +\infty$

Pour m > 1 : $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$

Pour m = 1 :

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x = \lim_{+\infty} \frac{\cancel{x^2}+x+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x} = \lim_{+\infty} \frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \frac{1}{2}$$

4°/On a : $\lim\limits_{+\infty} f_m$ est finie si m = 1

D'où pour m = 1 , Cf_m admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation : $y = \frac{1}{2}$

$$5°/ \lim_{+\infty} f_m(x) = \begin{cases} +\infty \text{ pour } m < 1 \\ -\infty \text{ pour } m > 1 \\ \frac{1}{2} \text{ pour } m = 1 \end{cases}$$

Pour $m \neq 1$ on a :

$$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-mx}{x}$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{\cancel{x}.\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-m\right)}{\cancel{x}} = 1-m$$

$$\lim_{+\infty} [f(x)-(1-m)x]$$

$$= \lim_{+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-mx-x+mx$$

$$= \lim_{+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x = \frac{1}{2}$$

D'où : $D_m : y = (1-m)x + \frac{1}{2}$ est une asymptote à Cf_m au voisinage de $+\infty$

Solution 13 :

1°/ $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2°/ $\lim\limits_{(-1)^-} f = \lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{2x + \cos x}{x + 1}$

On a : $\begin{cases} \lim\limits_{(-1)^-} x + 1 = 0^- \\ \lim\limits_{x \to (-1)^-} 2x + \cos x = -2 + \cos(-1) < 0 \end{cases}$

D'où : $\lim\limits_{(-1)^-} f = +\infty$

$\lim\limits_{(-1)^+} f = \lim\limits_{x \to (-1)^+} \dfrac{2x + \cos x}{x + 1}$

On a : $\begin{cases} \lim\limits_{(-1)^+} 2x + \cos x = -2 + \cos(-1) < 0 \\ \lim\limits_{x \to (-1)^+} (x + 1) = 0^+ \end{cases}$

D'où : $\lim\limits_{(-1)^+} f = -\infty$

D : x = -1 est une asymptote verticale à Cf

3°/

a) Pour tout x $\in \left]-1, +\infty\right[$:

$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 2x - 1 \leq \cos x\text{-}2x \leq 2x + 1$

Or pour tout x $\in \left]-1, +\infty\right[$ on a : $x + 1 > 0$

$$\frac{2x - 1}{x + 1} \leq f(x) \leq \frac{2x + 1}{x + 1}$$

b)

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 1}{x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 1}{x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$

Et comme pour tout x > -1 on a :

$$\frac{2x-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x+1}$$

Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f = 2$

D : y = 2 est une asymptote horizontale à Cf au voisinage de $+\infty$.

$4°/ d(x) = f(x) - y = \dfrac{2x+\cos x}{x+1} - 2 = \dfrac{2x+\cos x - 2x - 2}{x+1}$

$= \dfrac{\cos x - 2}{x+1}$

On a : pour tout $x \in Df$: $\cos x - 2 < 0$

• pour $x \in]-\infty, -1[$: $d(x) > 0$

d'où Cf est au dessus de Δ sur $]-1, +\infty[$

• pour $x \in]-1, +\infty[$: $d(x) < 0$

$\Rightarrow Cf$ est au dessous de Δ sur $]-1, +\infty[$

5°/ on a : $2x - 1 \leq 2x + \cos x \leq 2x + 1$

pour $x < -1$ on a : $x + 1 < 0$

d'où : $\forall x < -1$: $\dfrac{2x+1}{x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{2x-1}{x+1}$

on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+1}{x+1} = 2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x-1}{x+1} = 2$

d'où $\lim\limits_{-\infty} f = 2$

Solution 14 :

1°/ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{(1+x^2-1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{0}{2} = 0$$

On a : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 \in \mathbb{R}$ donc f est prolongeable par continuité en 0

2°/ $\begin{cases} f_1(x) = f(x) \; pour \; x \neq 0 \\ f_1(0) = \lim\limits_0 f = 0 \end{cases}$

3°/ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$?

$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 - \cos x \leq 2$

$\Rightarrow$ Pour tout $x > 0$: $0 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{x}$

On a : $\begin{cases} 0 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{x} \quad pour \; tout \; x > 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to -\infty} f = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-1}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}{x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} - \frac{1}{x} \right) = -1$$

D_1 : $y = 0$ est une asymptote à Cf au voisinage de $+\infty$

D_2 : $y = -1$ est une asymptote à Cf au voisinage de $-\infty$

Solution 15 :

1°/ $\lim\limits_{x \to -\infty} f = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$ **($x < 0$ alors $|x| = -x$)**

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1$$

Conclusion : $\lim_{-\infty} f = -1$ donc D : y = -1 est une asymptote horizontale à Cf au voisinage de $-\infty$

2°/

a) On a : $-1 \leq \cos x \leq 1$

D'où : $\frac{-2}{\sqrt{x}} \leq \frac{\cos x - 1}{\sqrt{x}} \leq 0$ pour x > 0

b) On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x}} = 0 \\ et \sqrt{x} > 0 : \frac{-2}{\sqrt{x}} \leq f(x) \leq 0 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f = 0$

D'où : D' : y = 0 est ue asymptote horizontale à Cf au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x \to 0^+} f = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0^+} -\sqrt{x}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right) = 0 \times 0 = 0$$

3°/ $\lim\limits_{x \to 0^-} f = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{0}{\sqrt{1}} = 0$

On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} f = \lim\limits_{x \to 0^-} f = 0 = f(0)$

D'où f est continue en 0

b) $$* \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x} \right) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$* \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - 1}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0^+} -\sqrt{x}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$

$$= 0 \times \frac{1}{2} = 0 = f'_d(0)$$

$f'_g(0) \neq f'_d(0)$ d'où f n'est pas dérivable en 0

Cf admet deux demi-tangentes en 0

$T_1 : \begin{cases} y = x \\ x \leq 0 \end{cases}$; $T_2 : \begin{cases} y = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$

Solution 16 :

1°/• $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2}{2x+1} = 0$

• $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x}\,\dfrac{\sin x}{x} = 0 \times 1 = 0$

On a : $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{0} f = 0$ alors f est continue en 0

2°/a) $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{2} = -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^2}{2x+1}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{2x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - \dfrac{1}{2}x \right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2}{2x+1} - \dfrac{x}{2} \right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x}{4x+2} = \dfrac{-1}{4}$

D : $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$ est une asymptote à Cf au voisinage de $-\infty$

b) Pour $x \in \mathbb{R}^-$: $f(x) - y = \dfrac{x^2}{2x+1} - \left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4} \right) = \dfrac{x^2}{2x+1} - \dfrac{2x-1}{4}$.

$$= \frac{4x^2 - (2x-1)(2x+1)}{4(2x+1)} = \frac{1}{4(2x+1)}$$

Pour $x \in \left] -\infty , -\dfrac{1}{2} \right[$: $f(x) - y < 0$ donc Cf est e dessous de Δ

Pour $x \in \left] -\dfrac{1}{2}, 0 \right[$: Cf est au dessus de Δ

3°/Pour $x > 0$: $-\dfrac{1}{\sqrt{x}} \le \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} \le \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f = 0$

D : $y = 0$ est une asymptote à Cf au voisinage de $+\infty$.

SUITES REELLES

Des résultats à retenir :

- Soit (u_n) une suite réelle et a fini ou infini .
  $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ si et seulement si , $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = a$.
- Toute suite convergente est bornée .
- Soit une suite (U_n) convergente vers un réel a .
  - S'il existe un entier N_0 tel que $0 \leq u_n$ pour tout $n \geq N_0$, alors $0 \leq a$.
  - S'il existe un entier N_0 tel que $u_n \leq 0$ pour tout $n \geq N_0$, alors $a \leq 0$.
- Soit un entier naturel N_0 et une suite (U_n) , $n \geq 0$. on suppose qu'il existe deux réels m et M tel que $m \leq u_n \leq M$, $n \geq 0$.
  si la suite (u_n) est convergente vers un réel a , alors $m \leq a \leq M$.
- Soit (u_n) une suite géométrique définie par $u_n = q^n$, $n \geq 0$, où q est un réel non nul .
  - Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = +\infty$
  - Si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 0$.
  - Si $q \leq -1$, alors la suite (u_n) n'a pas de limite .
  - Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante .
- Soit f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite d'éléments de I .
  Si (un) tend vers un réel a de I alors ($f(u_n)$) tend vers $f(a)$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (U_n) une suite d'éléments de I .
  Si $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = \ell$ (fini ou infini) et si $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = L$ (fini ou infini) ,
  alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(u_n)) = \mathrm{L}$.
- Soit deux suites (u_n) et (v_n) convergentes respectivement vers deux réels a et b .
  S'il existe un entier N_0 tel que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq N_0$ alors $a \leq b$.

- Soit trois suites réelles (u_n) , (v_n) et (w_n) . Soit a un réel .
  On suppose qu'il existe un entier N_0 tel que $v_n \leq u_n \leq w_n$, $n \geq N_0$.

  Si $\lim\limits_{x \to +\infty} v_n = \lim\limits_{x \to +\infty} w_n = a$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = a$.

- Soit deux suites réelles (u_n) et (v_n) .
  On suppose qu'il existe un entier N tel que $0 \leq |u_n| \leq v_n$, $n \geq N$.

  Si $\lim\limits_{x \to +\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = 0$

- Soit deux suites réelles (u_n) et (v_n) .
  - S'il existe un entier N_0 tel que $u_n \geq v_n$, $n \geq N_0$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = +\infty$

    alors $\lim\limits_{x \to +\infty} v_n = +\infty$.
  - S'il existe un entier N_0 tel que $u_n \leq v_n$, $n \geq N_0$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = -\infty$

    alors $\lim\limits_{x \to +\infty} v_n = -\infty$.
- Soit (u_n) une suite définie pour $n \geq 0$.
  - Si la suite (u_n)est croissante et majorée , alors elle converge vers un réel a et pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq a$.
  - Si la suite (u_n)est décroissante et minorée , alors elle converge vers un réel b et pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq b$.
- Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.
- Soit une suite (u_n) vérifiant le relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$,

  $n \geq 0$ où f est une fonction .
  Si la suite (u_n) est convergente vers un réel a et si la fonction f est

  continue en a alors $a = f(a)$

- Deux suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ sont adjacentes lorsqu'elles vérifient les conditions .
  - Pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq v_n$,
  - La suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante .
  - La suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0 .

  Dans ce cas les suites (u_n) et (v_n) convergent vars la même limite .

EXERCICES

Exercice 1 :

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{Un}{2+Un^2} \end{cases}$$

1°/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $Un > 0$

2°/ a)Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} U_n$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$: $Un \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

3°/ Montrer que (U_n) est convergente vers 0

4°/ Soit $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

a) Montrer que (S_n) est croissante

b) Montrer que $S_n \leq 2\left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

c) En déduire que (S_n) est convergente vers un réel $\ell \in [1,2]$

Exercice 2 :

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{1+U_n^2} \end{cases}$$

1°/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 < U_n < 1$

2°/

a) Montrer que (U_n) est une suite croissante

b) Montrer que (U_n) est convergente

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n$

3°/ $V_n = \dfrac{1-U_n}{1+U_n}$

a) Montrer que : $V_{n+1} = V_n^2$

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : \quad V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{(2^n)}$

4°/

a) Montrer que $0 \leq 1 - U_{n+1} \leq \frac{4}{5}(1 - U_n)$

b) Montrer que $0 \leq 1 - U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

c) Montrer que Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$1 - \frac{1}{n}\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right) \leq \frac{\sum_{k-1}^{n} U_K}{n} \leq 1$$

Exercice 3 :

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tel que $U_n = \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{p^2}\right)$

1°/ Calculer U_1 et U_2

2°/ Montrer que (U_n) est croissante

3°/ Montrer que

a) Pour tout $p \geq 2$: $\frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$

b) En déduire que (U_n) est majorée

4°/ Montrer que (U_n) est convergente .

Exercice 4 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et

$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2}$.

1°/ Prouver que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n > 0$.

2°/ Etudier la monotonie de (u_n).

3°/ On pose $v_n = u_n^2$.

a) Prouver que (v_n) est une suite arithmétique.

b) Calculer v_n puis u_n en fonction de n.

4°/ Etudier ainsi la convergence de (u_n) .

Exercice 5 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = \frac{5}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_{n+1} = 3 - \frac{n}{2(n+1)} \cdot (3 - u_n).$$

1°/ Prouver que $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n < 3$.

2°/a) Justifier que : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}(3 - u_n)$.

b) Etudier ainsi la monotonie de (u_n).

3°/ Montrer que (u_n) est convergente.

4°/ On pose $v_n = n(3 - u_n)$ où $n \in \mathbf{N}^*$.

a) Prouver que (v_n) est une suite géométrique.

b) Calculer v_n en fonction de n.

5°/a) En déduire le terme général de (u_n) .

b) Calculer ainsi la limite de (u_n) .

Exercice 6 :

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \end{cases} \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

1°/Calculer u_1 et v_1.

2°/On pose pour tout entier n : $w_n = u_n - v_n$.

a) Prouver que (w_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n < v_n$.

3°/a) Etudier la monotonie de chacune des suites (u_n) et (v_n).

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \geq 1$ et $v_n \leq 2$.

c) Justifier que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l.

4°/ On pose $\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n = u_n + v_n$.

a) Prouver que (a_n) est une suite constante.

b) Calculer alors l.

5°/ Exprimer en fonction de n, le terme général de (u_n) et (v_n) .

Exercice 7 :

Soient les suites tels que : $U_0 = 1$ et $V_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$U_{n+1} = \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n} \text{ et } V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}.$$

1°/ Démontrer que $0 < U_n < V_n$.

2°/ a) Démontrer que (U_n) est une suite croissante et que (V_n) est une suite décroissante.

b) Montrer que (U_n) et (V_n) sont deux suites convergentes vers la même limite l .

3°/ a) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}, \ U_n \cdot V_n = 2$.

b) En déduire la valeur de l .

Exercice 8 :

Soient les suites $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définis par :

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } V_n = U_n + \frac{1}{n!}$$

1°/ Montrer que (U_n) est une suite croissante et que (V_n) est une suite décroissante.

2°/ Montrer que $\forall p \in \mathbf{N}, \ \forall q \in \mathbf{N}^*$ on a : $U_p \le V_q$.

3°/ Montrer en utilisant le 2°/ que (U_n) et (V_n) sont deux suites convergentes vers la même limite.

Exercice 9 :

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par :

$$U_0 = 1 \ , U_1 = 2, \ \forall n \in \mathbf{N}, \ U_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} U_n$$

1°/ Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$: $U_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \dfrac{1}{2^{2n}}$

2°/ Soit $n \in \mathbf{N}$ et V $V_n = (n+1) U_n U_{n+1}$.

Montrer que (V_n) est une suite constante.

3°/ Exprimer U_{2n-1} en fonction de n .

Exercice 10 :

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^3+k}$.

1°/ Calculer U_1 et U_2.

2°/ Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n+1}{n^2+1} \leq U_n \leq \frac{1+n}{n^2}$.

3°/ Démontrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Exercice 11 :

1°/ Démontrer que $\forall x > 0$, $\forall n \geq 2$ on a : $(1+x)^n > C_n^2 x^2$.

2°/ Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_n = \frac{n+1}{2^n}$.

a) Prouver que $\forall n \leq 2$, $U_n \leq \frac{2(n+1)}{n^2-n}$.

b) Etudier ainsi la convergence de (U_n).

Exercice 12 :

1°/ Montrer que $\forall x \geq 0$ on a : $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.

2°/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

3°/ Soit la suite (U_n) définie par : $U_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \sin(\frac{\alpha k}{n^2})$ où α est un paramètre réel ≥ 0.

Prouver en utilisant le 1°/ que :

$$\forall n \geq 1 \text{ on a : } \frac{\alpha(n+1)}{2n} - \frac{\alpha^3(n+1)^2}{24n^4} \leq U_n(\alpha) \leq \alpha\frac{n+1}{2n}$$

4°/ En déduire que $(U_n(\alpha))$ converge vers $\frac{\alpha}{2}$.

5°/ Soit la suite $V_n = \sum_{k=1}^{n} \sin^3(\frac{k}{n^2})$; $(n \geq 1)$

a) Etablir que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $\sin^3 x = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$.

b) Montrer que $\forall n \geq 1$ on a : $V_n = -\frac{1}{4}U_n(3) + \frac{3}{4}U_n(1)$.

c) Montrer alors que (V_n) est une suite convergente vers zéro.

Exercice 13 :

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $U_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k!}$

1°/ Montrer que (U_n) est une suite croissante.

2°/ a) Prouver que $\forall k \geq 1$ on a : $k! \geq k$.

b) En déduire que $\forall n \geq 1$ on a $U_n \leq 1 - (\frac{1}{2})^n$.

3°/ Montrer que (U_n) est convergente vers un réel $l \in]\frac{1}{2}, 1[$.

Exercice 14 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$.

1°/a) Montrer que $\forall x \geq 1 : f(x) \geq 1$.

b) Montrer que $\forall x \geq 1 : f(x) \leq x$.

2°/ On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 1$.

b) Etudier la monotonie de (u_n).

c) Montrer que (u_n) est convergente et trouver sa limite.

3°/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$

Exercice 15 :

$U_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\dfrac{1}{k!}\right)$, $V_n = U_n + \dfrac{1}{n.n!}$

1°/ Montrer que (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante

2°/ Montrer que (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes .

Exercice 16 :

$$U_n = 2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \quad ; \quad V_n = 2^{n+1}\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

1°/Etudier le sens de variations de chacune des suites (U_n) et (V_n)
2°/Montrer que $V_n > U_n$
3°/Montrer que (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes et calculer leur limite

Exercice 17 :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n V_n}{U_n + V_n} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2} \end{cases}$$

1°/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$0 < U_n < V_n$$

2°/

a) Montrer que : $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(V_n - U_n)$

b) Montrer que : $V_n - U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

3°/ Montrer que (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes .
4°/

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_nV_n = 2$
b) Calculer alors la limite ℓ de (U_n) et (V_n)

Exercice 18 :

I- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \dfrac{x}{1+x+x^2}$

1) Montrer que $\forall x \geq 0$ on a : $f(x) \leq x$
2) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$

II-

1) $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ :\ U_n > 0$

b) Montrer que (U_n) est convergente et calculer sa limite

2)

a) Montrer que $\forall n \geq 1 : f\left(\dfrac{1}{n}\right) \leq \dfrac{1}{n+1}$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ :\ U_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

3)

a) Montrer que $1 \leq \dfrac{1}{U_{n+1}} - \dfrac{1}{U_n} \leq 1 + \dfrac{1}{n+1}$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $n \leq \dfrac{1}{U_n} - 1 \leq n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

SOLUTIONS

Solution 1 :

1°/ On a : $U_0 = 1 > 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n > 0$, montrons que $U_{n+1} > 0$

On a : $U_{n+1} = \dfrac{Un}{2+Un^2} > 0$

Conclusion : Pour $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_n > 0$

2°/

a) $U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n = \dfrac{Un}{2+Un^2} - \dfrac{1}{2}U_n = \dfrac{2U_n - 2U_n - U_n^3}{2(2+U_n^2)} = \dfrac{-U_n^{\ 3}}{2+U_n^{\ 2}} < 0$

D'où pour $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}U_n$

b) Pour n = 0, on a : $U_0 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^0$

$1 \leq 1$ vraie

Soit $n \in \mathbb{N}$: et $U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$; Montrons que $U_{n+1} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

On a : $U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \dfrac{1}{2}U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

Or : $U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}U_n$ D'où : $U_{n+1} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

Conclusion : Pour $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

3°/ On a : $\begin{cases} 0 < U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0 \quad \left(\dfrac{1}{2} \in]-1,1[\right) \end{cases}$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

4°/ a) $S_{n+1} - S_n = (U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_{n+1}) - (U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n)$
$= U_{n+1} > 0$

D'où : (S_n) est croissante .

b) On a : $U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

D'où : $S_n \leq 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Or $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

D'où : $S_n \leq 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

c) On a : $S_n \leq 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 2$

$\begin{cases} (S_n) \text{ est une suite croissante} \\ (S_n) \text{ est majorée par } 2 \end{cases}$ D'où (S_n) est convergente

On note $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} S_n$

on a : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n > U_0$ car $U_n > 0$
d'où : $S_n > 1$ et par suite $\ell \geq 1$
on a : $S_n \leq 2$ d'où $\ell \leq 2$
conclusion : $1 \leq \ell \leq 2$

Solution 2 :

1°/ On a : $U_0 = \frac{1}{2}$ d'où $0 < u_0 < 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 < U_n < 1$ et montrons que $0 < U_{n+1} < 1$

On a : $U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{U_n^2 + 1} > 0$ car $U_n > 0$

$$U_{n+1} - 1 = \frac{2U_n}{U_n^2+1} - 1 = \frac{2U_n - U_n^2 - 1}{Un^2+1} = \frac{-(U_n-1)^2}{U_n^2+1} < 0$$

D'où : $0 < U_{n+1} < 1$
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < U_n < 1$.

2°/

a) $U_{n+1} - U_n = \dfrac{2U_n}{U_n^{\,2}+1} - U_n = \dfrac{U_n(1-U_n^2)}{1+U_n^{\,2}}$

On a : $0 < U_n < 1$ d'où : $(1 - U_n^2) > 0$

Et par suite : $U_{n+1} - U_n > 0$

Conclusion : (U_n) est une suite croissante

b) $\begin{cases} \text{(Un) est une suite croissante} \\ \text{(Un) est majorée par 1} \end{cases}$

d'où (U_n) est convergente

c) Soit $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} U_n$

$U_{n+1} = f(U_n)$ où $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

f est continue sur $\mathbb{R}$

D'où : $\ell = f(\ell)$ et par suite

$\ell = \dfrac{2\ell}{1+\ell^2}$ d'où $\ell^3 + \ell = 2\ell$ signifie : $\ell = 0 \, ou \; \ell = 1 \, ou \; \ell = -1$

On a : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ (U_n)\text{est croissante} \end{cases}$ alors $U_n \geq \dfrac{1}{2}$ or $U_n < 1$

d'où $\dfrac{1}{2} \leq U_n \leq 1$ et par suite $\dfrac{1}{2} \leq \ell < 1$

Conclusion : $\ell = 1 = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

3°/

a) $V_{n+1} = \dfrac{1-U_{n+1}}{1+U_{n+1}} = \dfrac{1-\dfrac{2U_n}{1+U_n^2}}{1+\dfrac{2U_n}{1+U_n^2}} = \dfrac{1+U_n^2-2Un}{1+U_n^2+2U_n} = \left(\dfrac{1-U}{1+U_n}\right)^2 = V_n^2$

b) $V_0 = \dfrac{1-U_0}{1+U_0} = \dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{1}{3} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{(2^0)}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{(2^n)}$ Montrons que : $V_{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{(2^{n+1})}$

On a : $V_{n+1} = V_n^2 = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{(2^n)}\right]^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{(2^n)\times 2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{(2^{n+1})}$

Conclusion : Pour $\forall n \in \mathbb{N}$: $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{(2^n)}$

4°/

a) On a : $U_{n+1} < 1$ d'où : $1 - U_{n+1} > 0$

$$1 - U_{n+1} = 1 - \frac{2U_n}{1+U_n^2} = \frac{(1-U_n)^2}{1+U_n^2}$$

$$(1 - U_{n+1}) - \frac{4}{5}(1 - U_n) = \frac{(1-U_n)^2}{1+U_n^2} - \frac{4}{5}(1 - U_n)$$

$$= (1 - U_n)\left[\frac{1-U_n}{1+U_n^2} - \frac{4}{5}\right] = (1 - U_n)\left(\frac{5-5U_n-4-4U_n^2}{5(1+U_n)}\right)$$

$$= \frac{(1-U_n)(1-5U_n-4U_n^2)}{5(1+U_n)}$$

Soit $P(x) = -4x^2 - 5x + 1$

$\Delta = 25 + 16 = 41$

$$x' = \frac{5-\sqrt{41}}{-8} \quad ; \quad x'' = \frac{5+\sqrt{41}}{-8}$$

x		x''		x'	
P(x)	-	0	+	0	-

Or $U_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ d'où : $1 - 5U_n - 4U_n^2 < 0$

($x' < \frac{1}{2} < 1$) et par suite $0 < 1 - U_{n+1} < \frac{4}{5}(1 - U_n)$

b) Soit n = 0

$$0 \leq 1 - U_0 \leq \left(\frac{4}{5}\right)^0 \quad \text{vraie car on a : } U_0 = \frac{1}{2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $0 \leq 1 - U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ et montrons que :

$$0 \leq 1 - U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$

On a : $0 \leq 1 - U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \Rightarrow 0 \leq \frac{4}{5}(1 - U_n) \leq \frac{4}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^n$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 - U_{n+1} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 \leq 1\text{-}\ U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^k$

c) On a : $0 \leq 1 - U_k \leq \left(\frac{4}{5}\right)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow 0 \leq \sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n} U_k \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{5}\right)^k \Rightarrow 0 \leq n - \sum_{k=1}^{n} U_k \leq \frac{4}{5}\,\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n}{1-\frac{4}{5}}$$

$$\Rightarrow 0 \leq n - \sum_{k=1}^{n} U_k \leq 4\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$$

Et par suite : $1 - \frac{4}{n}\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right) \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} U_K}{n} \leq 1$

Solution 3 :

1°/ $U_1 = \sum_{p=1}^{1}\left(\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{1^2} = 1$

$$U_2 = \sum_{p=1}^{2}\left(\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}$$

2°/ $U_{n+1} - U_n = \sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p^2} - \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2} = \frac{1}{(n+1)^2}$

D'où (U_n) est une suite croissante

3°/

a) • $\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} = \frac{1}{(p-1)p}$

• $\frac{1}{p^2} - \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{(p-1)p} = \frac{(p-1)-p}{p^2(p-1)} = \frac{-1}{p^2(p-1)}$

D'où : $\frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$

b) On a : $\frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$ pour tout $p \geq 2$

D'où : $\forall n \geq 2$ on a :

$$\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p^2} \leq \sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p-1} - \sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p}$$

$$U_n - 1 \leq \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

$$U_n - 1 \leq 1 - \frac{1}{n}$$

$$U_n \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$$

$\Rightarrow$ (U_n) est majorée par 2

4°/ $\begin{cases} (U_n) \text{ est une suite croissante} \\ (U_n) \text{ est majorée par } 2 \end{cases}$ Alors (U_n) est convergente

Solution 4 :

1°/ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n > 0$.

- Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 > 0$ donc l'inégalité est vraie pour $n = 0$;
- Soit $n \in \mathbf{N}$ Supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$.

On a $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2} > 0$.

Conclusion : $n \in \mathbf{N}$, $u_n > 0$.

2°/ $n \in \mathbf{N}$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2 + 2} - u_n = \frac{u_n^2 + 2 - u_n^2}{\sqrt{u_n^2 + 2} + u_n} = \frac{2}{\sqrt{u_n^2 + 2} + u_n} > 0 .$$

(Car $u_n > 0$). D'où la suite (u_n) est croissante.

3°/a) $v_{n+1} - v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2 = (u_n^2 + 2) - u_n^2 = 2$ donc la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de 1er terme $v_0 = u_0^2 = 1$.

b) On a : $v_n = v_0 + n \cdot r = 1 + 2n$; $u_n = \sqrt{v_n} = \sqrt{1 + 2n}$

4°/ On a $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = \sqrt{1 + 2n}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Conclusion : (u_n) n'est pas convergente.

Solution 5 :

1°/ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n < 3$.

- Pour $n = 1$, on a $u_1 < 3$ car $u_1 < \frac{5}{2}$.
- Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons que $u_n < 3$ et montrons que $u_{n+1} < 3$.

$$u_{n+1} - 3 = 3 - \frac{n}{2(n+1)}(3 - u_n) - 3 = -\frac{n}{2(n+1)}(3 - u_n)$$

Or $u_n < 3 \Rightarrow 3 - u_n > 0$ d'où $-\frac{n}{2(n+1)}(3 - u_n) < 0$ et par suite

$u_{n+1} - 3 < 0 \Rightarrow u_{n+1} < 3$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n < 3$.

2°/a) $u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{n}{2(n+1)}(3 - u_n) - u_n = 3 - u_n - \frac{n}{2(n+1)}(3 - u_n)$

$$= (3-u_n)\left(1-\frac{n}{2(n+1)}\right) = (3-u_n)\frac{n+2}{2(n+1)}.$$

b) On a $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n < 3 \Rightarrow 3-u_n > 0$ et $\dfrac{n+2}{2(n+1)} > 0$ d'où $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1}-u_n > 0$ et par suite (u_n) est une suite croissante.

3°/ La suite (u_n) est croissante et majorée par 3 donc (u_n) est convergente.

4°/a) $v_{n+1} = (n+1)(3-u_{n+1})$ or $u_{n+1} = 3-\dfrac{n}{2(n+1)}\cdot(3-u_n)$ donc

$3-u_{n+1} = \dfrac{n}{2(n+1)}\cdot(3-u_n)$ et par suite

$$v_{n+1} = (n+1)\cdot\frac{n}{2(n+1)}\cdot(3-u_n) = \frac{n}{2}(3-u_n) = \frac{1}{2}v_n.$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de 1er terme

$v_1 = 3-u_1 = \dfrac{1}{2}$.

b) $v_n = v_1 \cdot q^{n-1}$ où q est la raison de la suite (v_n) d'où

$$v_n = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

5°/a) On a $v_n = n(3-u_n)$, pour $n \in \mathbf{N}^*$ $\Rightarrow 3-u_n = \dfrac{v_n}{n} \Rightarrow$

$u_n = 3-\dfrac{v_n}{n}$. Or $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ d'où $u_n = 3-\dfrac{1}{n}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

b) On a : $-1 < \dfrac{1}{2} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Solution 6 :

1°/ $u_1 = \dfrac{3+2}{4} = \dfrac{5}{4}$; $v_1 = \dfrac{1+6}{4} = \dfrac{7}{4}$.

2°/ a) $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{3u_n+v_n}{4} - \dfrac{u_n+3v_n}{4}$

$$= \frac{2u_n-2v_n}{4} = \frac{1}{2}(u_n-v_n) = \frac{1}{2}\cdot w_n$$

donc (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de 1^{er} terme $w_0 = u_0 - v_0 = -1$.

b) On a $w_n = w_0 \cdot q^n$ où q est la raison de (w_n) donc $w_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0$ donc $w_n < 0 \Rightarrow u_n - v_n < 0 \Rightarrow u_n < v_n$.

3°/a) • $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + v_n}{4} - u_n = \frac{v_n - u_n}{4} > 0$ car $u_n < v_n$ donc la suite (u_n) est croissante.

• $\forall n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n - v_n}{4} < 0$ car $u_n < v_n$ donc la suite (v_n) est décroissante.

b) • (u_n) est une suite croissante donc $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq u_0$ or $u_0 = 1 \Rightarrow u_n \geq 1$.

• (v_n) est une suite décroissante donc $\forall n \in \mathbf{N}$, $v_n \leq v_0$ or $v_0 = 2 \Rightarrow v_n \leq 2$.

c) • On a : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leq v_n \leq 2 \Rightarrow u_n \leq 2$. On a : (u_n) est croissante et majorée par 2 donc (u_n) converge vers un réel l.

• On a : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leq v_n$ or $u_n \geq 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbf{N}$, $1 \leq v_n$. On a : (v_n) est décroissante et minorée par 1 donc la suite (v_n) converge vers un réel l'.

• On a $\forall n \in \mathbf{N}$, $w_n = u_n - v_n$. Or (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0 \Rightarrow 0 = l - l' \Rightarrow l = l'$.

Conclusion : (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l.

4°/a) $\forall n \in \mathbf{N}$, on a : $a_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4} + \frac{u_n + 3v_n}{4} = u_n + v_n = a_n$.

Donc $\forall n \in \mathbf{N}$, on a $a_{n+1} = a_n$ ce qui prouve que la suite (a_n) est constante et $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n = a_0 = u_0 + v_0 = 3$ donc $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n = 3$.

b) On a $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n = u_n + v_n \Rightarrow u_n + v_n = 3 \Rightarrow$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n + \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 3 \Rightarrow 2l = 3 \Rightarrow l = \frac{3}{2}$.

5°/ on a : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\begin{cases} u_n + v_n = 3 \\ u_n - v_n = w_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_n = \dfrac{3+w_n}{2} \\ v_n = \dfrac{3-w_n}{2} \end{cases}$

Or $w_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = \frac{1}{2}\left(3-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ et $v_n = \frac{1}{2}\left(3+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

Solution 7 :

1°/ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 < U_n < V_n$.

- Pour $n = 0$ on a : $0 < U_0 < V_0$ (car $U_0 = 1$ et $V_0 = 2$).
- Supposons que pour un entier donné n on a : $0 < U_n < V_n$ et montrons que $0 < U_{n+1} < V_{n+1}$.

$U_{n+1} = \dfrac{2U_nV_n}{U_n+V_n}$ est le quotient de réel strictement positifs d'où $U_{n+1} > 0$.

$$U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n+V_n} - \frac{U_n+V_n}{2}$$

$$= \frac{4U_nV_n - (U_n+V_n)^2}{2(U_n+V_n)} = \frac{-(U_n-V_n)^2}{2(U_n+V_n)} < 0$$

d'où $U_{n+1} < V_{n+1}$ et par suite $0 < U_{n+1} < V_{n+1}$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 < U_n < V_n$.

2°/ a) • $U_{n+1} - U_n = \dfrac{2U_nV_n}{U_n+V_n} - U_n = \dfrac{U_nV_n - U_n^2}{U_n+V_n} = \dfrac{U_n(V_n-U_n)}{U_n+V_n}$

on a : $0 < U_n < V_n$ d'où $U_{n+1} - U_n > 0 \Rightarrow (U_n)$ est une suite croissante.

• $V_{n+1} - V_n = \dfrac{U_n+V_n}{2} - V_n = \dfrac{U_n-V_n}{2}$

or $U_n < V_n$ d'où (V_n) est une suite décroissante.

b) On a : $U_n \le V_n$ et $V_n \le V_0$ (car (V_n) est une suite décroissante) d'où $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n \le 2$.

(U_n) est une suite croissante, majorée par 2 donc (U_n) est convergente.

(V_n) est une suite décroissante, minorée par 0 donc (V_n) est convergente.

Soit $l = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ et $l' = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_{n+1}$

Comme $V_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2}$ d'où $l' = \dfrac{l+l'}{2} \Rightarrow l = l'$.

3°/ a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n \cdot V_n = 2$.

• pour $n = 0$: $U_0 \cdot V_0 = 1 \cdot 2 = 2$

• Supposons que pour un entier donné n on a : $U_n \cdot V_n = 2$ et montrons que $U_{n+1}V_{n+1} = 2$.

$$U_{n+1}V_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n + V_n} \cdot \frac{U_n + V_n}{2} = U_nV_n = 2.$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n \cdot V_n = 2$.

b) On a : $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n \cdot V_n = 2$

comme $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l$ donc $l^2 = 2$ et par suite $|l| = \sqrt{2}$

comme $l \geq 0$ donc $l = \sqrt{2}$.

Solution 8 :

1°/ • $U_{n+1} - U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$

donc la suite (U_n) est croissante.

• $V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)!} - U_n - \dfrac{1}{n!} = U_{n+1} - U_n + \dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!}$

$= \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!} = \dfrac{2}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!}$

$= \dfrac{2-n-1}{(n+1)!} = \dfrac{-n+1}{(n+1)!} \leq 0$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.

On a $\forall n \geq 1$, $V_{n+1} - V_n \leq 0$ d'où $(V_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante.

2°/ Soit $p \in \mathbf{N}$ et $q \in \mathbf{N}^*$.

<u>*1er Cas*</u> :

Si $p \leq q \Rightarrow U_p \leq U_q$ (car (U_n) est croissante)

Or $V_q = U_q + \frac{1}{q!} \Rightarrow V_q \geq U_q$ d'où $U_p \leq U_q \leq V_q \Rightarrow U_p \leq V_q$.

<u>$2^{ème}$ *Cas*</u> :

Si $q \leq p \Rightarrow V_p \leq V_q$ (car (V_n) est décroissante)

Et on a : $V_p \geq U_p$ d'où $U_p \leq V_p \leq V_q \Rightarrow U_p \leq V_q$.

Conclusion : $\forall p \in \mathbf{N}\ \ q \in \mathbf{N}^*$, $U_p \leq V_q$.

• On a : $\forall p \in \mathbf{N}\ \ q \in \mathbf{N}^*$, $U_p \leq V_q$

On choisit $p = n$ et $q = 1$ donc $U_n \leq V_1 = 3$

(U_n) est une suite croissante majorée par 3 donc elle converge.

• On choisit $p = 0$ et $q = n$ donc $U_0 \leq V_n$.

Or $U_0 = 1 \Rightarrow V_n \geq 1$ et par suite (V_n) est décroissante minorée par 1 donc elle converge.

3°/ Soit $l = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ et $l' = \lim\limits_{n \to +\infty} V_n$

$V_n - U_n = \frac{1}{n!}$ or $n! \geq n \Rightarrow \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow 0 \leq V_n - U_n \leq \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n - U_n = 0$ et par suite $l = l'$.

Solution 9 :

1°/ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}$, $U_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n}}$

• Pour $n = 0$, $U_0 = 1 = \frac{(2 \cdot 0)!}{(0!)^2} \cdot \frac{1}{2^0}$

• Supposons que pour un entier donné n , $U_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n}}$ et montrons que

$U_{2(n+1)} = \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2(n+1)}}$

On a : $U_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot U_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n}}$

$$=\frac{(2n+1)!}{2(n+1)(n!)^2}\cdot\frac{1}{2^{2n}}=\frac{(2n+2)(2n+1)!}{4(n+1)(n+1)(n!)^2}\cdot\frac{1}{2^{2n}}=\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}\cdot\frac{1}{2^{2n+2}}$$

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N},\ U_{2n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{1}{2^{2n}}$.

2°/ On a : $\begin{cases} V_{n+1}=(n+2)U_{n+1}\cdot U_{n+2} \\ U_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}U_n \end{cases} \Rightarrow V_{n+1}=(n+1)U_{n+1}\cdot U_{2n}=V_n$

donc $\forall n\in\mathbb{N},\ V_{n+1}=V_n$ et par suite (V_n) est une suite constante.

3°/ On a : $\forall n\in\mathbb{N},\ V_n=V_0=2 \Rightarrow U_n\cdot U_{n+l}=\frac{2}{n+1}$

$\Rightarrow U_{2n}\cdot U_{2n+1}=\frac{2}{n+1}$ or $U_{2n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{1}{2^{2n}}$

$\Rightarrow U_{2n+1}=\frac{2}{(2n+1)}\cdot\frac{(n!)^2\cdot 2^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow U_{2n+1}=\frac{2^{2n+1}\cdot(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Solution 10 :

1°/ $U_1=\sum_{k=0}^{1}\frac{1}{1+k}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$; $U_2=\sum_{k=0}^{2}\frac{2}{8+k}=\frac{2}{8}+\frac{2}{9}+\frac{2}{10}=\frac{121}{180}$.

2°/ On a : $0\le k\le n \Rightarrow n^3\le n^3+k\le n^3+n \Rightarrow \frac{1}{n^3+n}\le\frac{1}{n^3+k}\le\frac{1}{n^3}$

$\Rightarrow \frac{n}{n^3+n}\le\frac{n}{n^3+k}\le\frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n}\frac{n}{n^3+n}\le\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{n^3+k}\le\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n^2} \Rightarrow$

$\frac{n(n+1)}{n^3+n}\le U_n\le\frac{n+1}{n^2}$ d'où $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{n+1}{n^2+1}\le U_n\le\frac{n+1}{n^2}$

3°/ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$

donc (U_n) converge vers 0.

Solution 11 :

1°/ On a d'après la formule de Binôme-Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^k \, b^{n-k}$$

On choisit $a = x$ et $b = 1$ d'où $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^k \, 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^k$

On a : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^k = C_n^0 \, x^0 + C_n^1 x + C_n^2 \, x^2 + C_n^3 \, x^3 + ... + C_n^n \, x^n$: c'est une somme

de $(n+1)$ termes positifs $(x \geq 0)$ d'où $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^k > C_n^2 x^2$

et par suite $(1+x)^n > C_n^2 \, x^2$.

2°/ a) On a : $(1+x)^n > C_n^2 \, x^2$, on choisit $x = 1$ on obtient :

$2^n > C_n^2$ d'où $\dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{C_n^2} \Rightarrow \dfrac{n+1}{2^n} < \dfrac{2(n+1)}{n^2 - n}$ car $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Conclusion : $U_n < \dfrac{2(n+1)}{n^2 - n}$.

b) $0 < U_n < \dfrac{2(n+1)}{n^2 - n}$. On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2(n+1)}{n^2 - n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$.

(U_n) est une suite convergente vers 0.

Solution 12 :

1°/ • Montrons que $\forall x \geq 0$, $\sin x \leq x$

Soit $f(x) = \sin x - x$;

f est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et $\forall x \in \mathbf{R}_+$, $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$ car $\forall x \in \mathbf{R}_+$,

$-1 \leq \cos x \leq 1$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	0 ↘	

D'après le tableau des variations de f, on a : 0 est un maximum absolu de f donc $\forall x \in \mathbf{R}_{+},\ \sin x \leq x$.

• Montrons que $\forall x \in \mathbf{R}_{+},\ x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x$.

Soit $g(x) = \sin x + \dfrac{x^3}{6} - 1$

g' est dérivable sur $\mathbf{R}_{+}$ et $\forall x \in \mathbf{R}_{+},\ g''(x) = x - \sin x \geq 0$ (car $\sin x \leq x$).

x	0		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	
$g'(x)$	0	$+$ ↗	
$g(x)$	0	↗	

D'après le tableau des variations de g, on a : $\forall x \in \mathbf{R}_{+},\ g'(x) \geq 0$ et par suite $\forall x \in \mathbf{R}_{+},\ x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x$

Conclusion : $\forall x \in \mathbf{R}_{+},\ x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.

2°/ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

• Pour $n = 0$, $\sum_{k=0}^{0} k^3 = \dfrac{0^2(0+1)^2}{4}$

• Supposons que pour un entier n donné, $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ et montrons que $\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

On a : $\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$

$= (n+1)^2(\frac{n^2}{4} + n + 1) = (n+1)^2(\frac{n^2+4n+4}{4}) = (n+1)^2\frac{(n+2)^2}{4}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

3°/ On a : $\forall x \in \mathbf{R}_+$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ et $\forall k \geq 1$, $\forall \alpha \geq 0$, $\frac{\alpha k}{n^2} \geq 0$

donc pour $x = \frac{\alpha k}{n^2}$ on a : $\frac{\alpha k}{n^2} - \frac{\alpha^3 k^3}{6n^6} \leq \sin(\frac{\alpha k}{n^2}) \leq \frac{\alpha k}{n^2} \Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\alpha\ k}{n^2} - \frac{\alpha^3\ k^3}{6n^6}\right) \leq \mathrm{U}_n(\alpha) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha\ k}{n^2}$$

or : $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\alpha\ k}{n^2} - \frac{\alpha^3\ k^3}{6n^6}\right) = \frac{\alpha}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{\alpha^3}{6n^6}\sum_{k=1}^{n} k^3$

$= \frac{\alpha}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{\alpha^3}{6n^6} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{\alpha(n+1)}{2n} - \frac{\alpha^3(n+1)^2}{24n^4}$

d'où $\forall n \geq 1$: $\frac{\alpha(n+1)}{2n} - \frac{\alpha^3(n+1)^2}{24n^4} \leq \mathrm{U}_n(\alpha) \leq \alpha\frac{n+1}{2n}$.

4°/ On a : $\forall n \geq 1$: $\frac{\alpha(n+1)}{2n} - \frac{\alpha^3(n+1)^2}{24n^4} \leq \mathrm{U}_n(\alpha) \leq \alpha\frac{n+1}{2n}$

et $\lim_{n \to +\infty}(\frac{\alpha(n+1)}{2n} - \frac{\alpha^3(n+1)^2}{24n^4}) = \lim_{n \to +\infty} \alpha\frac{n+1}{2n} = \frac{\alpha}{2}$

d'où $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{U}_n(\alpha) = \frac{\alpha}{2}$.

5°/ On a : $\forall x \in \mathbf{R}$, $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$; $(i^2 = -1)$

$\Rightarrow \sin^3 x = -\frac{1}{8i}(e^{ix} - e^{-ix})^3 = -\frac{1}{8i}(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix})$

$\Rightarrow \sin^3 x = -\frac{1}{8i}(e^{3ix} - e^{-3ix} - 3(e^{ix} - e^{-ix}))$

$$\Rightarrow \sin^3 x = -\frac{1}{8i}(2i\sin 3x - 6i\sin x) \quad \text{d'où} \quad \sin^3 x = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$$

b) Soit $n \geq 1$, $V_n = \sum_{k=1}^{n} \sin^3(\frac{k}{n^2}) = \sum_{k=1}^{n}(-\frac{1}{4}\sin(\frac{3k}{n^2}) + \frac{3}{4}\sin(\frac{k}{n^2}))$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\sin(\frac{3k}{n^2}) + \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n}\sin(\frac{k}{n^2}) = -\frac{1}{4}U_n(3) + \frac{3}{4}U_n(1)$$

c) On a : $\lim_{n\to+\infty} U_n(\alpha) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n(3) = \frac{3}{2}$ et $\lim_{n\to+\infty} U_n(1) = \frac{1}{2}$

d'où $\lim_{n\to+\infty} V_n = -\frac{1}{2}\times\frac{3}{2} + \frac{3}{4}\times\frac{1}{2} = 0$.

Conclusion : (V_n) est une suite convergente vers 0.

Solution 13 :

1°/ $U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{n+1} 2^{-k!} - \sum_{k=1}^{n} 2^{-k!} = 2^{-(n+1)!} \quad > 0$

d'où (U_n) est une suite croissante.

2°/ a) $k! = k(k-1)\times\cdots\times 3\times 2\times 1 = k(k-1)!$

on a : $(k-1)! \geq 1$ d'où $k(k-1)! \geq k$ et par suite $\forall k \geq 1$ on a : $k! \geq k$.

b) Soit la suite $V_n = 2^n$.

(V_n) est une suite croissante car $V_{n+1} - V_n > 0$.

$k! \geq k \Rightarrow V_{k!} \geq V_k \Rightarrow 2^{k!} \geq 2^k$ d'où $2^{-k!} \leq 2^{-k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} 2^{-k!} \leq \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}$

$$\Rightarrow U_n \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

On a : $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

D'où $U_n \leq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

3°/ On a : $-\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0 \Rightarrow 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$ d'où $\forall n \geq 1$, $U_n < 1$.

(U_n) est une suite croissante, majorée par 1 donc (U_n) converge vers l .

On a : $U_1 = \sum_{k=1}^{1} 2^{-k!} = \frac{1}{2}$

On a : $\forall n \geq 1$, $U_n \geq U_1$ d'où $\frac{1}{2} \leq U_n < 1$ et par suite $\frac{1}{2} \leq l < 1$.

Solution 14 :

1°/a) $f(x) - 1 = \frac{x^2}{2x-1} - 1 = \frac{x^2 - 2x + 1}{2x-1} = \frac{(x-1)^2}{2x-1}$

on a : $\forall x \geq 1$ on a : $2x \geq 2$ d'où $2x - 1 \geq 1$ d'où $\forall x \geq 1$ on a $f(x) - 1 \geq 0$.

Conclusion : $\forall x \geq 1$, $f(x) \geq 1$.

b) $f(x) - x = \frac{x^2}{2x-1} - x = \frac{x^2 - x(2x-1)}{2x-1} = \frac{-x^2 + x}{2x-1} = \frac{x(1-x)}{2x-1}$

on a : $\forall x \geq 1$, $1 - x \leq 0$ et $2x - 1 > 0$ d'où $f(x) - x \leq 0$.

Conclusion : $\forall x \geq 1$, $f(x) \leq x$.

2°/a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq 1$.

pour $n = 0$, on a $u_0 = 2 \geq 1$.

Soit $n \in \mathbf{N}$, supposons que $u_n \geq 1$ et montrons que $u_{n+1} \geq 1$.

On a $u_n \geq 1$ donc $f(u_n) \geq 1$ (d'après 1°/ a)) d'où $u_{n+1} \geq 1$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq 1$.

b) on a – d'après 1°/ b) – $\forall x \geq 1$, $f(x) \leq x$.

On pose $x = u_n$ car $u_n \geq 1$ donc $f(u_n) \leq u_n$ d'où $u_{n+1} \leq u_n$ et par suite (u_n) est une suite décroissante.

c) on a : (u_n) est une suite décroissante minorée par 1 donc (u_n) est convergente. Soit l sa limite.

On a : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq 1$ d'où $l \geq 1$.

On a : f est continue sur $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ donc f est continue en l car $l \neq \frac{1}{2}$ d'où $f(l) = l$.

$f(l) = l \Leftrightarrow \frac{l^2}{2l-1} = l \Leftrightarrow l^2 = 2l^2 - l \Leftrightarrow l^2 - l = 0 \Leftrightarrow l(l-1) = 0 \Leftrightarrow$ $l = 0$ ou $l = 1$. Or $l \geq 1$ d'où $l = 1$.

Conclusion : (u_n) est une suite convergente vers 1.

3°/ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = \dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{(2^n)}}$.

• pour $n=0$ on a : $2^0 = 1$ d'où $\dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^0}} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 = u_0$.

• Soit $n \in \mathbf{N}$, supposons que $u_n = \dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{(2^n)}}$ et montrons que

$u_{n+1} = \dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{(2^{n+1})}}$.

On a : $u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{u_n^2}{2u_n - 1}$

$$2u_n - 1 = \frac{2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}} - 1 = \frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}} = \frac{\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)}{\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right]^2}$$

$$= \left(1-\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)^2\right)\cdot u_n^2 = \left(1-\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}\right)\right)\cdot u_n^2$$

d'où $\dfrac{u_n^2}{2u_n-1} = \dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}} = u_{n+1}$ et par suite $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = \dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$.

Solution 15 :

1°/

- $U_{n+1} - U_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$ d'où (U_n) est une suite croissante

- $$V_{n+1} - V_n = \left(U_{n+1} + \frac{1}{(n+1).(n+1)!}\right) - \left(U_n + \frac{1}{n.n!}\right)$$

$$= (U_{n+1} - U_n) + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - \frac{1}{n.n!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{(n+1)} - \frac{n+1}{n.}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{-1}{n(n+1)}\right) < 0$$

D'où (V_n) est une suite décroissante

2°/ $\lim\limits_{x \to +\infty} (V_n - U_n) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{n.n} = 0$

$$\left(\begin{array}{l} n\,! \geq 1 \Rightarrow n\,.\,n\,! \geq n \\ \lim\limits_{x \to \infty} n = +\infty \text{ alors } \lim\limits_{x \to \infty} n\,.\,n! = +\infty \end{array}\right)$$

$\left\{\begin{array}{l} (U_n) \text{ est une suite croissante} \\ (V_n) \text{ est une suite décroissante} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (V_n - U_n) = 0 \end{array}\right.$ alors (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacents

Solution 16 :

1°/ $U_{n+1} - U_n = 2^{n+2} \sin \frac{\pi}{2^{n+3}} - 2^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$

$$= 2^{n+1}\left[2\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right) - \sin 2\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)\right]$$

$$= 2^{n+1}\left[2\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)\right]$$

$$= 2^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)\right)$$

On a : $\left(\dfrac{\pi}{2^{n+3}}\right) \in [0, \pi]$ d'où $\sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+3}}\right) > 0$

$$1 - \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right) \geq 0$$

Conclusion : $U_{n+1} - U_n \geq 0$ et par suite (U_n) est une suite croissante

$$V_{n+1} - V_n = 2^{n+2}\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right) - 2^{n+1}\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)$$

$$= 2^{n+1}\left(2\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right) - \tan\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

On a : $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1.\tan^2 x}$ car

$$\left[\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2\sin x cos x}{\cos^2 x\left(1 - \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)} = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}\right]$$

$$V_{n+1} - V_n = 2^{n+1}\left[2\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right) - \tan\left(2.\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)\right]$$

$$= 2^{n+1}\left[2\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right) - \left(\frac{2\tan\left(\dfrac{\pi}{2^{n+3}}\right)}{1 - \tan^2\left(\dfrac{\pi}{2^{n+3}}\right)}\right)\right] = \frac{-2^{n+2}\tan^3\left(\dfrac{\pi}{2^{n+3}}\right)}{1 - \tan^2\left(\dfrac{\pi}{2^{n+3}}\right)}$$

On a : $0 < \left(\dfrac{\pi}{2^{n+3}}\right) < \dfrac{\pi}{4}$

D'où : $0 < \tan\left(\dfrac{\pi}{2^{n+3}}\right) < 1$

Et par suite $V_{n+1} - V_n < 0$

Conclusion : (V_n) est une suite décroissante

2°/

a) $V_n - U_n = 2^{n+1}\sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right) - 2^{n+1}\tan\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right)$

$$= 2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\left(1-\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}\right) = \frac{2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)-1\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} < 0$$

Car : $\sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right) > 0$ et $0 < \cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right) < 1$

On a : $X = \dfrac{\pi}{2^{n+2}}$

Quand n $\to +\infty$ alors $X \to 0^+$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(V_n - U_n) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2^{n+1}\tan\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right) - 2^{n+1}\sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right)$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\pi}{2X}(\tan X - \sin X) = \lim_{x\to0}\frac{\pi}{2}\left(\frac{\tan X}{X} - \frac{\sin X}{X}\right) = 0$$

$\begin{cases} (U_n) \text{ est une suite croissante} \\ (V_n) \text{ est une suite décroissante} \\ \lim\limits_{n\to+\infty}(V_n - U_n) = 0 \end{cases}$ alors (U_n) et (V_n) sont adjacents

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \ell$

$U_n = 2^{n+1}\sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \dfrac{\pi}{2X}\sin X$ où $X = \dfrac{\pi}{2^{n+2}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to0^+}\dfrac{\pi}{2}\dfrac{\sin X}{X} = \dfrac{\pi}{2}$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \dfrac{\pi}{2}$

Solution 17 :

1°/$0 < U_0 < V_0$ est vraie car : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ V_0 = 2 \end{cases}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 < U_n < V_n$ montrons que : $0 < U_{n+1} < V_{n+1}$

On a : $U_{n+1} = \dfrac{2U_nV_n}{U_n + V_n} > 0$

$$V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} > 0 \quad \text{car} \begin{cases} U_n = 0 \\ V_n = 0 \end{cases}$$

- $U_{n+1} - V_{n+1} = \dfrac{2U_nV_n}{U_n + V_n} - \dfrac{U_n + V_n}{2} = \dfrac{4U_nV_n - (U_n + V_n)^2}{2(U_n + V_n)}$

$$= \frac{4U_nV_n - U_n^2 - 2U_nV_n - V_n^2}{2(U_n + V_n)} = \frac{-(U_n - V_n)^2}{2(U_n + V_n)} < 0$$

D'où : $0 < U_{n+1} < V_{n+1}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < U_n < V_n$

2°/

a) $V_{n+1} - U_{n+1} - \dfrac{1}{2}(V_n - U_n) = \dfrac{(U_n - V_n)^2}{2(U_n + V_n)} - \dfrac{1}{2}(V_n - U_n)$

$$= \frac{(U_nV_n)^2 - (V_n + U_n)(V_n + U_n)}{2(U_n + V_n)} = \frac{U_n^2 - 2U_nV_n + V_n^2 - V_n^2 + U_n^2}{2(U_n + V_n)}$$

$$= \frac{2U_n(U_n - V_n)}{2(U_n + V_n)} = \frac{U_n(U_n - V_n)}{U_n + V_n} < 0 \quad \text{car :} \quad 0 < U_n < V_n$$

D'où : $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(V_n - U_n)$

b)

On a : $V_0 - U_0 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^0$ vraie car : $U_0 = 1$; $V_0 = 2$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $V_n - U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

On a : $V_{n+1} - U_{n+1} \leq (\dfrac{1}{2}(V_n - U_n) \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $V_n - U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

3°/

- Etude de la monotonie de (U_n)

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2U_nV_n}{U_n + V_n} - U_n = \frac{U_nV_n - U_n^2}{U_n + V_n} = \frac{U_n(V_n - U_n)}{U_n + V_n}$$

On a : $0 < U_n < V_n$ d'où : $U_{n+1} - U_n > 0$

Conclusion : (U_n) est une suite croissante

- Etude de le monotonie de (V_n)

$$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n + V_n}{2} - V_n = \frac{U_n - V_n}{2} < 0$$

D'où : (V_n) est une suite décroissante

On a : $\begin{cases} * \ (U_n) \text{ est une suite croissante} \\ * \ (V_n) \text{ est une suite décroissante} \\ * \ \lim\limits_{n \to +\infty} (V_n - U_n) = 0 \end{cases}$

Alors (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes

4°/ a)* $U_0V_0 = 1 \times 2 = 2$

* Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_nV_n = 2$

et montrons que : $U_{n+1}V_{n+1} = 2$

$$U_{n+1}V_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n + V_n} \cdot \frac{U_n + V_n}{2} = U_nV_n = 2$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_nV_n = 2$

b) (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes alors

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} V_n = \ell \in \mathbb{R}$$

Or $U_nV_n = 2$ d'où : $\ell^2 = 2$

Et par suite : $\ell = \sqrt{2}$ ou $\ell = -\sqrt{2}$ Or $U_n > 2$ d'où $\ell \geq 0$

Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \sqrt{2}$

Solution 18 :

I-

1°/ $$f(x) - x = \frac{x}{x^2 + x + 1} - x = \frac{x - x(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1}$$

$$= \frac{x - x^3 - x^2 - x}{x^2 + x + 1} = \frac{-x^2(x+1)}{x^2+x+1} \leq 0 \quad \text{car} \quad x \geq 0$$

2°/ f est continue , dérivable sur $\mathbb{R}^+$

$$f'(x) = \frac{1(1+x+x^2) - x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	0

II-

1°/

a) On a : $U_0 = 1 > 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n > 0$

On a : $\begin{cases} U_n > 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1+U_n+U_n^2} \end{cases}$ d'où $U_{n+1} > 0$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n > 0$

b) $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n \leq 0$ (d'après I) 1°/)

$\begin{cases} (U_n) \text{ est une suite décroissante} \\ (U_n) \text{ est minorée par } 0 \end{cases}$

Donc (U_n) est convergente

On a : $\begin{cases} \ell = \lim U_n \\ U_{n+1} = f(U_n) \\ f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+ \\ \ell \geq 0 \end{cases}$ donc $\ell = f(\ell)$

$$\begin{cases} f(\ell)=\ell \\ \ell \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\ell}{\ell^2+\ell+1}=\ell \\ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ell=\ell^3+\ell^2+\ell \\ \ell \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ell^3+\ell^2=0 \\ \ell \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ell^2(\ell+1)=0 \\ \ell \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ell=0 \text{ ou } \ell=-1 \\ \ell \geq 0 \end{cases}$$

(U_n) est une suite convergente vers 0

2°/

a) $$*f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{n^2+n+1}{n^2}}=\frac{n}{n^2+n+1}$$

$$*\,f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n^2+n+1}-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{-1}{\left(n^2+n+1\right)\left(n+1\right)} < 0 \text{ car } n \in \mathbb{N}$$

D'où : $f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}$

b) * $U_0 \leq 1$ vraie

* Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n \leq \frac{1}{n+1}$

Montrons que $U_{n+1} \leq \frac{1}{n+2}$

On a : $U_n \leq \frac{1}{n+1}$

Or f est strictement croissante sur $[0 , 1]$

D'où : $f(0) \leq f(U_n) \leq f\left(\frac{1}{n+1}\right)$

$0 \leq U_{n+1} \leq \frac{1}{n+2}$ (d'après 2°/ a))

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_n \leq \frac{1}{n+1}$

3°/

a) $\dfrac{1}{U_{n+1}}-\dfrac{1}{U_n}=\dfrac{1+U_n+U_n^2}{U_n}-\dfrac{1}{U_n}=\dfrac{U_n+U_n^2}{U_n}=1+U_n$

On a : $0 \leq U_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

D'où : $1 \leq 1+U_n \leq 1+\dfrac{1}{n+1}$

Et par suite $1 \leq \dfrac{1}{U_n+1}-\dfrac{1}{U_n} \leq 1+\dfrac{1}{n+1}$

b) On a : pour tout $k \geq 1$

$$1 \leq \frac{1}{U_k}-\frac{1}{U_k-1} \leq 1+\frac{1}{k}$$

D'où : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{U_k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{U_{k-1}} \leq \sum_{k=1}^{n} 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

$$n \leq \left(\frac{1}{U_1}+\frac{1}{U_2}+\dots+\frac{1}{U_n}\right)-\left(\frac{1}{U_0}+\frac{1}{U_1}+\dots+\frac{1}{U_{n-1}}\right) \leq n+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$n \leq \frac{1}{U_n}-\frac{1}{U_0} \leq n+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $n \leq \dfrac{1}{U_n}-1 \leq n+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{U_k}$

DERIVABILITE

résultats à retenir :

- Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est dérivable en un réel a de I s'il existe un réel , noté L tel que $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L$, L est noté f '(a).
- Soit f : $x \mapsto a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$
  Une fonction polynôme .
  La fonction f est dérivable en tout réel x et $f'(x) = na_n x^{n-1} + \ldots + a_1$.
- Si f est dérivable en a , alors le réel $f(a) + f'(a)h$ est une approximation affine de $f(a+h)$.
- Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est dérivable en un réel a de I , si et seulement si , elle est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.
- <u>*Dérivées des fonctions usuelles*</u>

Fonction f	***Intervalle***	f'
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	Tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -nx^{-n-1}$
$x \mapsto \sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto a\cos(ax+b)$
$x \mapsto \cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -a\sin(ax+b)$
$x \mapsto \tan(ax+b)$	Tout intervalle inclus dans l'ensemble de définition	$x \mapsto a(1+\tan^2(ax+b))$

- <u>*Opérations sur les fonctions dérivables*</u>
  Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Fonction	*Intervalle*	*Fonction dérivée*
$f+g$	I	$f'+g'$
$af\,(a \in \mathbb{R})$	I	af'
$f \times g$	I	$f' \times g + g' \times f$
$\frac{1}{f}$	Tout intervalle inclus dans $\{x \in I\,;f(x) \neq 0\}$	$\frac{-f'}{f^2}$
$\frac{f}{g}$	Tout intervalle inclus dans $\{x \in I\,;g(x) \neq 0\}$	$\frac{f'g-g'f}{g^2}$
$f^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	I	$n\,f'\,f^{n-1}$
$\frac{1}{f^n}, n \in \mathbb{N}^*$	Tout intervalle inclus dans $\{x \in I\,;f(x) \neq 0\}$	$-n\,f'\,f^{-n-1}$

- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a et g une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant $f(a)$.
  - Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.
  - Si f est dérivable sur un intervalle I et g est dérivable sur un intervalle J contenant $f(I)$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'[f(x)]$, pour tout x de I.
- *Théorème de Rolle:*

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.

Alors il existe un réel c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Si C_f est la représentation graphique de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, alors il existe au moins une tangente à C_f parallèle à la droite des abscisses.

- *Théorème des accroissements finis*

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$.

Si f est continue sur [a ,b] et dérivable sur] a , b [alors il existe un réel c de] a , b[tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Si C_f est la représentation graphique de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ alors il existe au moins une tangente à C_f parallèle à la droite (AB) où A et B sont les points de C_f d'abscisses respectives a et b .

- Soit f une fonction continue sur [a , b] ($a < b$) et dérivable sur] a , b [. soit deux réels m et M .
  Si $m \le f'(x) \le M$ pour tout x de] a ,b [,
  alors $m(b-a) \le f(b)-f(a) \le M(b-a)$
- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $M > 0$.
  Si $|f'(x)| \le M$ pour tout x de I , alors $|f(b)-f(a)| \le M|b-a|$, pour tout réels a et b de I .
- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I :
  - Si la dérivée de f est strictement positive sur I , alors la fonction f est strictement croissante sur I .
  - Si la dérivée de f est strictement négative sur I , alors la fonction f est strictement décroissante sur I .
- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .
  - Si f' est positive et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert contenu dans I , alors f est strictement croissante .
  - Si f' est négative et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert contenu dans I , alors f est strictement décroissante sur I .
- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et dérivable en un réel a de I et C_f sa courbe dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.
  On dit que le point A (a , $f(a)$) est un point d'inflexion de C_f si C_f traverse sa tangente en ce point .
- Soit f une fonction deux fois dérivable sur] a – h , a + h [, ($h > 0$) et C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé .
  Si la fonction dérivée seconde f'' de f s'annule en a en changeant de signe , alors le point I (a , $f(a)$)est un point d'inflexion de la courbe C_f .

EXERCICES

Exercice 1 :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x^2+4} \text{ pour } x \geq 0 \\ \dfrac{x^2}{x^2+2} + 2 \text{ pour } x < 0 \end{cases}$$

1°/ Montrer que f est continue en 0

2°/

a) Montrer que f est dérivable en 0

b) Interpréter géométriquement le résultat .

Exercice 2:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x-1} \text{ si } x \geq 1 \\ \dfrac{2x^2-2}{x^2+1} \text{ pour } x < 1 \end{cases}$$

1°/ Montrer que f est continue en 1

2°/

a) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$

b) Interpréter géométriquement le résultat .

Exercice 3:

$f(x) = \sqrt{|x| + x^2}$

1°/ Df

2°/ Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$

Exercice 4:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} & \text{pour x>0} \\ f(x)=x^2+ax+2b & \text{pourx} \leq 0 \end{cases}$$

1°/ Calculer b pour que f soit continue en 0

2°/ Calculer a pour que f soit dérivable en 0

Exercice 5 :

$f(x)=x^3+2x-1$

1°/ Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$

2°/

a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$

b) Montrer que Cf a un seul point d'inflexion I

3°/ Ecrire l'équation de la tangente (T) à Cf au point I .

Exercice 6 :

1°/ Montrer que $\forall\, x \in [0,\frac{\pi}{2}]$ on a : $1-\frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1-\frac{x^2}{\pi}$.

2°/ En déduire que $\forall\, x \in [0,\frac{\pi}{2}]$: $x-\frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x-\frac{x^3}{3\pi}$.

3°/ Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2}=0$.

Exercice 7 :

Utiliser le théorème des inégalités des accroissements finis pour montrer que :

1°/ $\frac{b-a}{\cos^2 a} \leq \tan(b)-\tan(a) \leq \frac{b-a}{\cos^2 b}$ $\quad (0<a<b<\frac{\pi}{2})$.

2°/ $\frac{1}{2\sqrt{a+1}} \leq \sqrt{a+1}-\sqrt{a} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}$ $\quad (a>0)$

3°/ $\frac{\pi}{2}-2x \leq (\operatorname{cotg} x)-1 \leq \frac{\pi}{4}-x$ $\quad (x \in [\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}])$.

Exercice 8 :

Soit $f(x)=\sqrt{x^2+8}-x$.

1°/ Prouver que $\forall x\in[1,2]$ on a : $1\leq f(x)\leq 2$ et $|f'(x)|\leq\frac{2}{3}$

2°/ Soit la suite (U_n) définie par $U_0=1$ et $U_{n+1}=f(U_n)$.

a) Montrer que $\forall n\in\mathbf{N},\ 1\leq U_n\leq 2$.

b) En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis, montrer que $\forall n\in\mathbf{N},\ \left|U_{n+1}-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right|\leq\frac{2}{3}\left|U_n-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right|$.

3°/a) Montrer que $\forall n\in\mathbf{N},\ \left|U_n-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right|\leq(\frac{2}{3})^n$.

b) En déduire que (U_n) est une suite convergente vers un réel l que l'on calculera.

Exercice 9 :

Soit $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+3}$.

1°/ Etudier les variations de f.

2°/ On définit la suite (U_n) par : $\begin{cases}U_0=0\\U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}$

a) Montrer que $\forall n\in\mathbf{N},\ \frac{-1}{3}\leq U_n\leq 0$.

b) Montrer que $\forall x\in[\frac{-1}{3},0],\ |f'(x)|\leq\frac{27}{98}$.

3°/ On pose $\forall n\in\mathbf{N},\ V_n=U_{2n}$ et $W_n=U_{2n+1}$

Prouver que $|W_{n+1}-V_{n+1}|\leq\left(\frac{27}{98}\right)^{2n}|W_n-V_n|$.

4°/a) Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbf{N}$,

$|W_n-V_n|\leq\left(\frac{27}{98}\right)^{2n}|W_0-V_0|$.

b) Montrer que (V_n) et (W_n) sont deux suites convergentes vers la même limite l.

5°/ En déduire que (U_n) est convergente vers l.

Exercice 10 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$.

1°/ Etudier les variations de f.

2°/ Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que le point A(0,1) est un centre de symétrie de C_f.

b) Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à C_f au point A.

3°/ a) Etudier la position de C_f et (T).

b) Tracer C_f et (T).

Exercice 11 :

Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$$x\mapsto\frac{x^3+2x^2+3x-2}{x^2+3}$$

A. On note ($\mathcal{C}$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°/ Montrer que f est dérivable sur **R** et que : $\forall x\in\mathbf{R}$,

$$f'(x)=\frac{(x+1)^2(x^2-2x+9)}{(x^2+3)^2}.$$

2°/ Etudier les variations de f.

3°/ a) Montrer qu'il existe trois réels a, b, c tels que :

$$\forall x\in\mathbf{R},\ f(x)=ax+b+\frac{c}{x^2+3}.$$

b) En déduire que ($\mathcal{C}$) admet une asymptote oblique Δ.

4°/ Etudier la position de ($\mathcal{C}$) et Δ.

5°/ a) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à ($\mathcal{C}$) au point d'abscisse $x_0=0$.

b) Montrer que (T) // Δ .

c) Etudier la position de ($\mathcal{C}$) et (T) .

d) Tracer ($\mathcal{C}$) .

B. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0=-\frac{1}{2} \\ \text{et} \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

1°/ Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}$, $-1 \leq u_n \leq 0$.

2°/ Montrer que (u_n) est une suite décroissante.

3°/ Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 12 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+4} & si\ x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{2}{x+1} - x & si\ x > 0 \end{cases}$

1°/ Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$.

2°/a) Etudier la dérivabilité de f en 0.

b) Interpréter géométriquement le résultat.

3°/a) Etudier les variations de f sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

b) Montrer que C_f admet une asymptote oblique Δ.

4°/ Etudier la position de C_f par rapport à Δ.

5°/ Tracer C_f dans un plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 13 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(x) = x - \dfrac{1}{x\sqrt{x}+1}$.

1°/ Etudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$.

2°/ Ecrire une équation de la tangente Δ à C_f en A d'abscisse $x_0 = 0$.

3°/ Etudier la position de C_f et Δ.

4°/a) Montrer que C_f admet une asymptote oblique D.

b) Etudier la position de C_f et D.

5°/a) Etudier les variations de f.

b) Tracer C_f dans un plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 14 :

Soit f : $[0, \pi] \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto 1 + \frac{1}{2}\cos x$$

1°/ Etudier les variations de f.

2°/ Montrer que C_f admet un seul point d'inflexion I.

3°/ Tracer C_f dans un plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 15 :

Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$

1°/ Etudier les variations de f

2°/ On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

a) Ecrire l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0 = 0$

b) Etudier la position de (C) et (T)

3°/ Tracer (C)

4°/ On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = -\dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 < U_n < 0$

b) Montrer que (U_n) est convergente et calculer sa limite .

5°/

a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < U_{n+1} + 1 \leq \dfrac{2\sqrt{5}}{5}(U_n + 1)$

b) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n + 1 \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)^n$

c) Retrouver ainsi la limite de la suite (U_n) .

Exercice 16 :

A) Soit f_n : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $x \mapsto \dfrac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}$ où n est entier ≥ 1

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1°/

a) Etudier la parité de f_n

b) Préciser les brancjes infinies de la courbe (C_n) .

2°/

a) Déterminer les points fixes de (C_n)

b) Etudier la position relative ce (C_{n+1}) et (C_n)

3°/ Etudier les variations de f_n .

B)

$U_0 \in]\,0, 1\,[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = f_k\ (U_n)$ où k est un entier fixe ≥ 1 .

1°/ Prouver que $\forall n \geq 1$, $0 < U_n < 1$

2°/Prouver que $\forall n \geq 1$, $U_{n+1} < \dfrac{1}{\sqrt{2}} U_n$

3°/

a) Prouver que (U_n) est une suite décroissante .

b) Prouver que (U_n) est une suite convergente vers un réel que l'on calculera .

SOLUTIONS

Solution 1 :

1°/ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x^2+4} = \sqrt{4} = 2$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2}{x^2+2}+2 = 2$

On a : $\lim\limits_{0} f = 2 = f(0)$ d'où f est continue en 0 .

2°/

a) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\dfrac{x^2}{x^2+2}}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x^2+x} = 0 = f_g'(0)$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x} =$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x^2+4-4)}{x(\sqrt{x^2+4}+2)}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}+2} = 0 = f_d'(0)$

On a : $f_g'(0) = f_d'(0)$ d'où f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

b) C_f admet au points A(0,2) une tangente horizontale d'équation

$$D:\ y = f'(0)x + f(0) = 2$$

Solution 2:

1°/ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x-1} = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x^2-2}{x^2+1} = 0$

On a : $\lim\limits_{1} f = f(1)$ d'où f est continue en 1

2°/

a)

- $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$

f est dérivable à droite en 1

- $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)(x-1)} =$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2(x+1)}{x^2+1} = 2$

f n'est pas dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = 2$

b) C_f admet à gauche en 1 , une demi tangente verticale d'équation $\begin{cases} y = 2(x-1) \\ x \leq 1 \end{cases}$

C_f admet à droite en 1 , une demi tangente d'équation $\begin{cases} x = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Solution 3 :

1°/ Pour tout $x \in \mathbb{R}$

On a : $|x| + x^2 \geq 0$

D'où $Df = \mathbb{R}$

2°/ * $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x^2+|x|}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2+x}{x\sqrt{x^2+x}}$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}} = +\infty$$

$$* \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{x^2-x}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{(x-1)}{\sqrt{x^2+x}} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x(x-1)}{x\sqrt{x^2+x}} = -\infty$$

f non dérivable en 0

Solution 4 :

1°/ $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2b = f(0)$$

Pour que f soit continue en 0 , il faut que $2b = \frac{1}{2}$ d'où $b = \frac{1}{4}$

2°/

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2+ax+2b-2b}{x}$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{x(x+a)}{x} = \lim_{x \to 0^-} (x+a) = a$$

D'où $f'_g(0) = a$

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} - \frac{1}{2}}{x}$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{2\sqrt{x^2+1}-(2+x^2)}{2x^3} = \lim_{x \to 0^+} \frac{4(x^2+1)-(2+x^2)^2}{2x^3(2\sqrt{x^2+1}+2+x^2)}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-x}{2[2\sqrt{x^2+1}+2+x^2]} = 0 = f_d'(0)$$

D'où $a = 0$

Solution 5 :

1°/ f est une fonction polynôme d'où f est dérivable sur $\mathbb{R}$

2°/

a) $f'(x) = 3x^2 + 2$; $f''(x) = 6x$

b) $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x		0	
$f''(x)$	-	0	+

f'' s'annule en 0 , en changeant de signe . d'où C_f a un seul point d'inflexion I(0 , -1)

3°/ T : $y = f'(0)x + f(0)$

$y = 2x - 1$

Solution 6 :

1°/ Montrons que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ 1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x$

$1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x \Leftrightarrow \cos x + \frac{x^2}{2} - 1 \ge 0$

Soit $f(x) = \cos x + \frac{x^2}{2} - 1$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

f est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ f'(x) = -\sin x + x$

f' est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ f''(x) = -\cos x + 1 \ge 0$ car $-1 \le \cos x \le 1$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$	0	$+$	
$f'(x)$	0	$\nearrow$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	

D'après ce tableau, 0 est un minimum absolu de f sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ donc

$\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $f(x) \geq 0$ et par suite : $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $1-\frac{x^2}{2} \leq \cos x$.

- Montrons que $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $\cos x \leq 1-\frac{x^2}{\pi}$:

$$\cos x \leq 1-\frac{x^2}{\pi} \Leftrightarrow \cos x+\frac{x^2}{\pi}-1 \leq 0$$

Soit $g(x)=\cos x+\frac{x^2}{\pi}-1$, $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$

$g'(x)=-\sin x+\frac{2x}{\pi}$; g' est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$

$g''(x)=-\cos x+\frac{2}{\pi}$

$g^{(2)}$ est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ donc $g^{(3)}(x)=\sin x$

x	0		β		$\frac{\pi}{2}$
$g^{(3)}(x)$	0		$+$		
$g^{(2)}(x)$	$\frac{2}{\pi}-1$	$\nearrow$ (−)	0	$\nearrow$ (+)	$\frac{2}{\pi}$
$g'(x)$	0	$\searrow$ (−)	$g'(\beta)$	$\nearrow$ (−)	0
$g(x)$	0		$\searrow$ (−)		

d'après le tableau des variations de g, 0 est un maximum absolu sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ donc $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $\cos x \leq 1-\frac{x^2}{\pi}$.

Conclusion : $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, on a : $1-\frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1-\frac{x^2}{\pi}$.

2°/• Soit $k(x)=x-\frac{x^3}{6}-\sin x$; k est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

$\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $k'(x)=1-\frac{x^2}{2}-\cos x \leq 0$ (d'après 1°/).

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$k'(x)$		$-$	
$k(x)$	0	$\searrow$ (–)	

donc $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $k(x) \leq 0 \Rightarrow x-\frac{x^3}{6} \leq \sin x$.

• Soit $h(x)=\sin x - x + \frac{x^3}{3\pi}$

h est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, $h'(x)=\cos x - 1 - \frac{x^2}{\pi} \leq 0$ (d'après 1°/)

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$ (–)	

donc $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $h(x) \leq 0$ et par suite $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $\sin x \leq x-\frac{x^3}{3\pi}$.

Conclusion : $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $x-\frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x-\frac{x^3}{3\pi}$.

3°/ On a : $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $x-\frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x-\frac{x^3}{3\pi} \Rightarrow -\frac{x^3}{6} \leq \sin x - x \leq -\frac{x^3}{3\pi}$

$\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $-\frac{x}{6} \leq \frac{\sin x - x}{x^2} \leq -\frac{x}{3\pi}$

On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} -\frac{x}{6} = \lim\limits_{x \to 0^+} -\frac{x}{3\pi} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$.

Cherchons $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sin x - x}{x^2}$.

On pose $t = -x$. Lorsque $x \to 0^- \Rightarrow t \to 0^+$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(-t) + t}{t^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\sin t + t}{t^2} = -\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin t - t}{t^2} = 0$$

Donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x - x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sin x - x}{x^2} = 0$.

Conclusion : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^2} = 0$.

Solution 7 :

1°/ Soit $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan x$

f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

f' est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

et $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $f''(x) = 2 \tan x \, (1 + \tan^2 x)$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$	0	$+$	||
$f'(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ||

Soient a et b tels que $0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$.

f est dérivable sur [a,b] et $\forall x \in [a,b]$, $f'(a) \leq f'(x) \leq f'(b)$

(car f' est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$)

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 a} \leq f'(x) \leq \frac{1}{\cos^2 b}$$

Donc d'après le théorème des inégalités des accroissements finis :

$(b-a)f'(a) \leq f(b)-f(a) \leq f'(b)(b-a)$

$$\Rightarrow \frac{(b-a)}{\cos^2 a} \leq \tan(b)-\tan(a) \leq \frac{(b-a)}{\cos^2 b}$$

2°/ Soit $g(x)=\sqrt{x}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

g' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ est $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g''(x) = \dfrac{-1}{4\sqrt{x^3}} < 0$

Donc g' est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $\alpha > 0$, $a \leq x \leq a+1 \Rightarrow g'(a+1) \leq g'(x) \leq g'(a)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{(a+1)}} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$\begin{cases} g \text{ est dérivable sur } [a,a+1] \\ \forall x \in]0,+\infty[, \dfrac{1}{2\sqrt{(a+1)}} \leq g'(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{a}} \end{cases} \text{ d'où } \frac{1}{2\sqrt{(a+1)}} \leq \sqrt{(a+1)}-\sqrt{a} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

3°/ Soit $h : [\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}], x \mapsto \operatorname{cotg} x$

h est dérivable sur $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ et $\forall x \in [\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$,

$$h'(x) = -1-\operatorname{cotg}^2 x = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

h' est dérivable sur $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ et $\forall x \in [\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$,

$$h''(x) = \frac{2\sin x \cos x}{\sin^4 x} = \frac{2\cos x}{\sin^3 x} \geq 0$$

Donc h' est strictement croissante sur $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ donc $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$$h'(\frac{\pi}{4}) \leq h'(x) \leq h'(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow -2 \leq h'(x) \leq -1$$

$$\begin{cases} h \text{est dérivable sur} [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \\ \forall x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}], -2 \leq h'(x) \leq -1 \end{cases}$$

D'après le théorème des inégalités des accroissements finis on a :

$$\forall x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \text{ , } -2(x - \frac{\pi}{4}) \leq h(x) - h(\frac{\pi}{4}) \leq -1.(x - \frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - 2x \leq \cot gx - 1 \leq \frac{\pi}{4} - x$$

Solution 8 :

1°/• $f(x)-1 = \sqrt{x^2+8} - x - 1 = \sqrt{x^2+8} - (x+1) = \dfrac{x^2+8-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+8}+x+1}$

$$= \frac{7-2x}{\sqrt{x^2+8}+x+1}$$

or $\forall x \in [1,2]$ on a : $2 \leq 2x \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq -2x \leq -2 \Leftrightarrow 3 \leq 7-2x \leq 5$

et comme $\forall x \in [1,2]$, $\sqrt{x^2+8}+x+1 > 0$ d'où $f(x)-1 \geq 0$

et par suite $f(x) \geq 1$.

- $f(x)-2 = \sqrt{x^2+8} - (x+2) = \dfrac{x^2+8-(x+2)^2}{\sqrt{x^2+8}+x+2} = \dfrac{4-4x}{\sqrt{x^2+8}+x+2}$

  or $1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 4 \leq 4x \leq 8 \Rightarrow 4-4x \leq 0$ d'où $f(x)-2 \leq 0$.

  Conclusion : $\forall x \in [1,2]$, $1 \leq f(x) \leq 2$.

- $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+8}} - 1 = \dfrac{x-\sqrt{x^2+8}}{\sqrt{x^2+8}} = \dfrac{-f(x)}{\sqrt{x^2+8}}$

  $\Rightarrow |f'(x)| = \dfrac{|f(x)|}{\sqrt{x^2+8}} = \dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+8}}$ car $f(x) > 0$

or $1 \leq f(x) \leq 2$ et comme $1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x^2 \leq 4 \Rightarrow 9 \leq x^2+8 \leq 12$

$$3 \leq \sqrt{x^2+8} \leq 2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{3}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+8}} \leq \frac{1}{3}$$

On a donc : $\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+8}} \le \dfrac{2}{3}$

Conclusion : $\forall x \in [1,2],\ |f'(x)| \le \dfrac{2}{3}$.

2°/a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N},\ 1 \le U_n \le 2$.

• Pour $n=0$, $U_0 = 1 \Rightarrow 1 \le U_0 \le 2$

• Supposons que pour un entier donné n, $1 \le U_n \le 2$ et montrons que $1 \le U_{n+1} \le 2$.

On a : $U_n \in [1,2]$ or pour tout $x \in [1,2]$, $1 \le f(x) \le 2 \Rightarrow$
$1 \le f(U_n) \le 2 \Rightarrow 1 \le U_{n+1} \le 2$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbf{N},\ 1 \le U_n \le 2$.

b) on a :

$$\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } [1,2] \\ \forall x \in [1,2], |f'(x)| \le \dfrac{2}{3} \\ \forall n \in \mathbf{N},\ U_n \in [1,2] \end{cases}$$

donc, d'après le théorème des inégalités des accroissements finis :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \left| f(U_n) - f(2\sqrt{\tfrac{2}{3}}) \right| \le \frac{2}{3}\left| U_n - 2\sqrt{\tfrac{2}{3}} \right|$$

or $f(U_n) = U_{n+1}$ et $f(2\sqrt{\tfrac{2}{3}}) = \sqrt{\dfrac{32}{3}} - 2\sqrt{\dfrac{2}{3}} = 4\sqrt{\dfrac{2}{3}} - 2\sqrt{\dfrac{2}{3}} = 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbf{N},\ \left| U_{n+1} - 2\sqrt{\dfrac{2}{3}} \right| \le \dfrac{2}{3}\left| U_n - 2\sqrt{\dfrac{2}{3}} \right|$.

3°/a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N},\ \left| U_n - 2\sqrt{\dfrac{2}{3}} \right| \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

• Pour $n=0$, $U_0 = 1 \Rightarrow \left| 1 - 2\sqrt{\dfrac{2}{3}} \right| \le 1$

• Supposons que pour un entier n donné, $\left| U_n - 2\sqrt{\dfrac{2}{3}} \right| \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

et montrons que $\left|U_{n+1}-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right| \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

On a : $\left|U_n-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right| \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n} \Rightarrow \frac{2}{3}\left|U_n-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right| \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

Or $\left|U_{n+1}-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right| \le \frac{2}{3}\left|U_n-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right| \Rightarrow \left|U_{n+1}-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right| \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbf{N},\ \left|U_n-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right| \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n}$.

b) On a : $\forall n \in \mathbf{N},\ \left|U_n-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right| \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}=0$ car $-1<\frac{2}{3}<1$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Solution 9 :

1°/ f est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$, $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x)=\frac{8x}{(x^2+3)^2}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1

2°/a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N},\ -\frac{1}{3} \le U_n \le 0$.

On a : $U_0 = 0$ donc $-\frac{1}{3} \le U_0 \le 0$

Supposons que $-\frac{1}{3} \le U_n \le 0$ et montrons que $-\frac{1}{3} \le U_{n+1} \le 0$.

f est strictement croissante sur $\mathbf{R}_-$ donc :

$-\frac{1}{3} \le U_n \le 0 \Rightarrow f(0) \le f(U_n) \le f(-\frac{1}{3})$

or $f(0)=-\frac{1}{3}$, $f(-\frac{1}{3})=-\frac{2}{7}$ d'où $-\frac{1}{3}\leq U_{n+1}\leq 0$

Conclusion : $\forall n\in\mathbf{N},\ -\frac{1}{3}\leq U_n\leq 0$.

b) $f'(x)=\dfrac{8x}{(x^2+3)^2}$. Etudions les variations de f' sur $[-\frac{1}{3},0]$.

$$f''(x)=\frac{8(x^2+3)^2-8x(4x)(x^2+3)}{(x^2+3)^4}=\frac{24(1-x^2)}{(x^2+3)^2}$$

x	$-\frac{1}{3}$		0
$f''(x)$		$+$	
$f'(x)$	$\frac{-27}{98}$	$\nearrow$	0

d'où $|f'(x)|\leq\dfrac{27}{98}$.

3°/ $|W_{n+1}-V_{n+1}|=|U_{2n+3}-U_{2n+2}|=|f(U_{2n+2})-f(U_{2n+1})|$

On a : f est dérivable sur $[-\frac{1}{3},0]$ et $\forall x\in[-\frac{1}{3},0]$, $|f'(x)|\leq\frac{27}{98}$ donc

d'après le théorème des inégalités des accroissements finis on a :

$\forall X\in[-\frac{1}{3},0]$ et $\forall Y\in[-\frac{1}{3},0]$ on a : $|f(X)-f(Y)|\leq\frac{27}{98}|X-Y|$

Donc $|f(U_{2n+2})-f(U_{2n+1})|\leq\frac{27}{98}|U_{2n+2}-U_{2n+1}|\ \Rightarrow$

$|W_{n+1}-V_{n+1}|\leq\frac{27}{98}|U_{2n+2}-U_{2n+1}|$

Or $|U_{2n+2}-U_{2n+1}|=|f(U_{2n+1})-f(U_{2n})|\leq\frac{27}{98}|U_{2n+1}-U_{2n}|$

Donc $|W_{n+1}-V_{n+1}|\leq\left(\dfrac{27}{98}\right)^2|W_n-V_n|$.

4°/ Montrons que $\forall n \in \mathbf{N},\ |W_n - V_n| \leq \left(\frac{27}{98}\right)^{2n} |W_0 - V_0|$

• pour $n = 0$: $|W_0 - V_0| \leq \left(\frac{27}{98}\right)^{0} |W_0 - V_0|$

• Supposons que $|W_n - V_n| \leq \left(\frac{27}{98}\right)^{2n} |W_0 - V_0|$ et montrons que

$|W_{n+1} - V_{n+1}| \leq \left(\frac{27}{98}\right)^{2n+2} |W_0 - V_0|$

$|W_{n+1} - V_{n+1}| \leq \left(\frac{27}{98}\right)^{2} |W_n - V_n| \leq \left(\frac{27}{98}\right)^{2} \left(\frac{27}{98}\right)^{2n} |W_0 - V_0|$

d'où $|W_{n+1} - V_{n+1}| \leq \left(\frac{27}{98}\right)^{2n+2} |W_0 - V_0|$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbf{N},\ |W_n - V_n| \leq \left(\frac{27}{98}\right)^{2n} |W_0 - V_0|$.

b) On a : $-\frac{1}{3} \leq V_n \leq 0$

Etudions le sens des variations de la suite (V_n).

On a : $V_0 = U_0 = 0$, $V_1 = U_2 = f(U_1) = f \circ f(U_0) = f(\frac{1}{3}) = \frac{-27}{98}$.

On a : $V_0 > V_1$

Supposons que pour un entier donné n, $V_n > V_{n+1}$ et montrons que $V_{n+1} > V_{n+2}$.

On a : $V_n > V_{n+1}$ et f est strictement décroissante sur $[-\frac{1}{3}, 0]$ donc $f(V_n) < f(V_{n+1})$.

Or $f(V_n) = f(U_{2n}) = U_{2n+1}$

$f(V_{n+1}) = f(U_{2n+2}) = U_{2n+3}$ donc $U_{2n+1} < U_{2n+3}$ et par suite

$f(U_{2n+1}) > f(U_{2n+3})$ d'où $U_{2n+2} > U_{2n+4}$ donc $V_{n+1} > V_{n+2}$.

d'où (V_n) est une suite décroissante

* $W_n = f(V_n)$

$W_{n+1} - W_n = f(V_{n+1}) - f(V_n)$ or $V_{n+1} < V_n$ et f est strictement décroissante

d'où : $f(V_{n+1}) > f(V_n)$ d'où $W_{n+1} > W_n$

conclusion : (W_n) est une suite croissante

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (V_n - W_n) = 0$ ($|W_n - V_n| \leq \left(\dfrac{27}{98}\right)^{2n} |W_n - V_n|$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{27}{98}\right)^{2n} = 0$)

d'où (V_n) et (W_n) sont deux suites adjacentes et par suite elles convergent vers la même limite ℓ.

5°/ $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} U_{2n} = \ell \\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_{2n+1} = \ell \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$ (théorème de cours)

Solution 10 :

1°/ $\forall x \in \mathbf{R},\ x^2 + 1 \neq 0$. f est continue, dérivable sur $\mathbf{R}$

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2+1) - 2x(x^2+x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 2x + x^2 + 1 - 2x^3 - 2x^2 - 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1

2°/a) $\forall x \in \mathbf{R}$ on a : $(2\times 0 - x) = -x \in \mathbf{R}$.

- $f(-x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2+1}$
- $2\times 1 - f(x) = 2 - \dfrac{x^2+x+1}{x^2+1} = \dfrac{2x^2+2-x^2-x-1}{x^2+1} = \dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}$

On a : $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = 2\times 1 - f(x)$.

Conclusion **:** $A(0,1)$ est un centre de symétrie de C_f.

b) T : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ or $f(0)=1$ et $f'(0)=1$ d'où $T: y = x+1$.

3°/a) Soit $\varphi(x) = f(x) - (x+1) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2+1} - (x+1)$

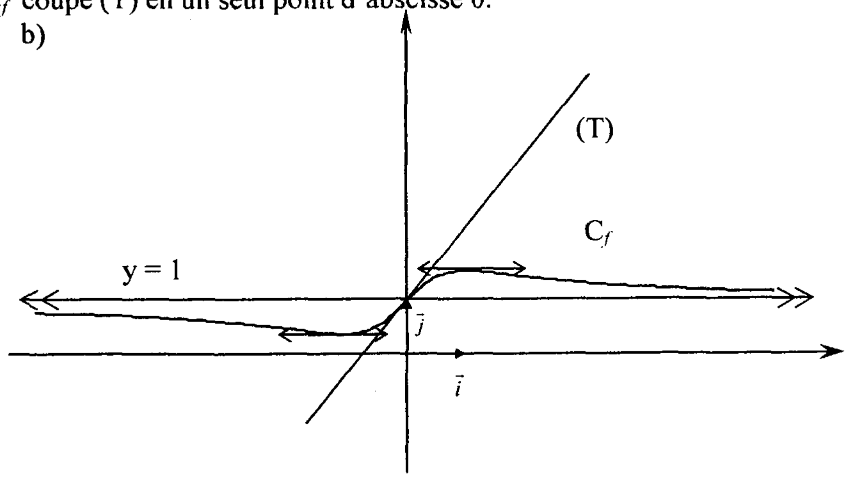
$$= \frac{x^2+x+1-(x^3+x+x^2+1)}{x^2+1}$$

On a : $\varphi(x) = \dfrac{-x^3}{x^2+1}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi(x)$	$+$	0	$-$

C_f est au dessus de (T) sur $]-\infty, 0]$.
C_f est au dessous de (T) sur $[0, +\infty[$.
C_f coupe (T) en un seul point d'abscisse 0.

b)



Solution 11 :

A. 1°/ a) $D_f = \mathbf{R}$

f est dérivable sur $\mathbf{R}$ car f est une fonction rationnelle.

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \frac{(3x^2+4x+3)(x^2+3) - 2x(x^3+2x^2+3x-2)}{(x^2+3)^2}$$

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \frac{x^4+6x^2+16x+9}{(x^2+3)^2}$$

or $(x+1)^2(x^2-2x+9) = (x^2+2x+1)(x^2-2x+9) = x^4+6x^2+16x+9$

d'où $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \dfrac{(x+1)^2(x^2-2x+9)}{(x^2+3)^2}$

2°/

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

3°/a) $ax + b + \dfrac{c}{x^2+3} = \dfrac{ax^3+bx^2+3ax+3b+c}{x^2+3} = f(x)$

d'où $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -8 \end{cases}$ d'où $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = x + 2 - \dfrac{8}{x^2+3}$.

b) $f(x) - (x+2) = \dfrac{-8}{x^2+3}$ et $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-8}{x^2+3} = 0$

donc la droite $\Delta : y = x+2$ est une asymptote oblique à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $\pm\infty$.

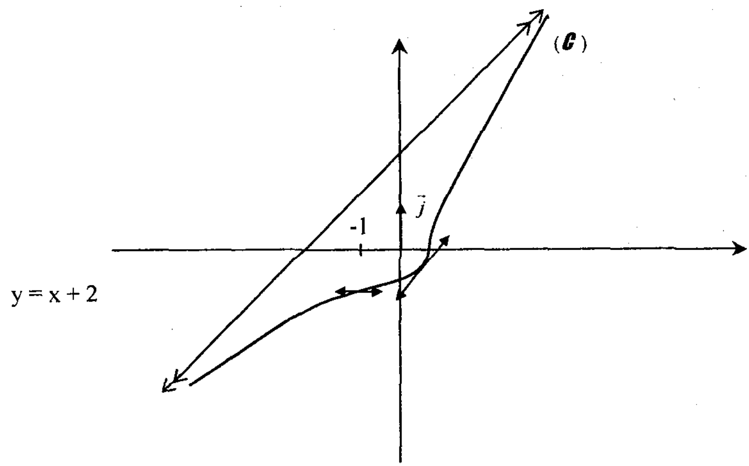
4°/ $h(x) = f(x) - y = f(x) - (x+2) = \dfrac{-8}{x^2+3} < 0$ d'où $(\mathscr{C})$ est au

dessous de Δ.

5°/a) T : $y = f'(0)x + f(0)$ or $f(0) = \dfrac{-2}{3}$ et $f'(0) = 1$ donc T: $y = x - \dfrac{2}{3}$.

b) $\Delta : y = x+2$. T et Δ ont même coefficient directeur donc T // Δ.

c) Soit $k(x) = f(x) - (x - \frac{2}{3}) = \frac{8x^2}{3(x^2+3)} \geq 0$ donc ($\mathscr{C}$) est au dessus de (T).



B. 1°/ Pour $n = 0$ on a : $u_0 = \frac{-1}{2}$ d'où $-1 \leq u_0 \leq 0$.

Soit $n \in \mathbf{N}$, supposons que $-1 \leq u_n \leq 0$ et montrons que $-1 \leq u_{n+1} \leq 0$.

On a : $\begin{cases} -1 \leq u_n \leq 0 \\ \text{et } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbf{R} \end{cases}$, donc :

$f(-1) \leq f(u_n) \leq f(0)$ or $f(-1) = -1$ et $f(0) = \frac{-2}{3}$

d'où $-1 \leq u_{n+1} \leq \frac{-2}{3} \leq 0$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbf{N},\ -1 \leq u_n \leq 0$.

2°/ $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^3 + 2u_n^2 + 3u_n - 3}{u_n^2 + 3} - u_n = \frac{2(u_n - 1)(u_n + 1)}{u_n^2 + 3}$

or $-1 \leq u_n \leq 0 \Rightarrow u_n - 1 < 0$ et $u_n + 1 \geq 0$ donc $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Conclusion : (u_n) est une suite décroissante.

3°/ (u_n) est une suite décroissante, minorée par -1 donc (u_n) est convergente.
Soit $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

On a : $u_{n+1} = f(u_n)$ et f est continue en 1 donc $f(l) = l$.

$\dfrac{l^3 + 2l^2 + 3l - 2}{l^2 + 3} = l \Leftrightarrow l^3 + 2l^2 + 3l - 2 = l^3 + 3l \Leftrightarrow l = \pm 1$ or

$-1 \le u_n \le 0 \Rightarrow -1 \le l \le 0$ d'où $l = -1$.

Conclusion : (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.

Solution 12 :

1°/• La fonction $f_1 : x \mapsto \sqrt{x^2+4}$ est continue sur **R** et en particulier sur $\mathbf{R}_-$.

• La fonction $f_2 : x \mapsto \dfrac{2}{x+1} - x$ est continue sur $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$ et en particulier sur $\mathbf{R}_+^*$.

• $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2 = f(0)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \sqrt{4} = 2 = f(0)$ donc f est continue en 0.

Conclusion : f est continue sur **R.**

2°/a) • $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{x^2+4} - 2}{x}$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+4} + 2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\sqrt{x^2+4} + 2} = 0$$

donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 0$.

$$\bullet \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2}{x+1} - x - 2}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2 - 3x}{x(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x(-x-3)}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x-3}{x+1} = -3$$

donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = -3$.

• On a : $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0.

b) La courbe de f admet 2 demi tangentes (le point d'abscisse 0 est un point anguleux)

$$T_1 : \begin{cases} y = f_g'(0)x + f(0) = 2 \\ x \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad T_2 : \begin{cases} y = f_d'(0)x + f(0) = -3x + 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

3°/a) • $\forall x \in]-\infty, 0[$, $f(x) = \sqrt{x^2+4} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

$\Rightarrow \forall x \in]-\infty, 0[$, $f'(x) < 0$.

x	$-\infty$		0
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2

• $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{2}{x+1} - x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^2} - 1 < 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\infty$

d'où le tableau des variations de f sur **R** :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

b) • On a : $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{2}{x+1} - x$ et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x+1} = 0$

donc la droite $\Delta : y = -x$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

• On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}=-1$$

et

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+4}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{\sqrt{x^2+4}-x}=0$$

donc la droite Δ : $y=-x$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $-\infty$.

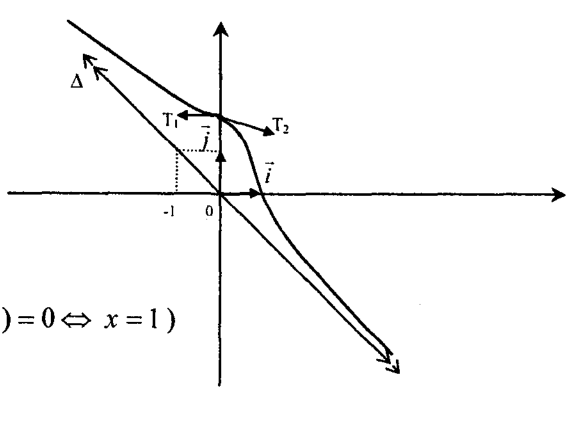
4°/ Etudions le signe de $f(x)+x$:

- $\forall x\in]0,+\infty[$, $f(x)+x=\dfrac{2}{x+1}>0 \Rightarrow C_f$ est au dessus de Δ sur $]0,+\infty[$.
- $\forall x\in]-\infty,0]$,

$f(x)+x=\sqrt{x^2+4}+x=\dfrac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}-x}=\dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}-x}>0$ donc C_f est au dessus de Δ sur $]-\infty,0]$.

Conclusion : C_f est au dessus de Δ.

5°/ Demi tangentes : T_1 : $\begin{cases} y=2 \\ x\le 0\end{cases}$ et T_2 : $\begin{cases} y=-3x+2 \\ x\ge 0\end{cases}$



$(f(x)=0\Leftrightarrow x=1)$

Solution 13 :

1°/ $D_f=\mathbb{R}_+$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x-\dfrac{1}{x\sqrt{x}+1}+1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2\sqrt{x}+x+x\sqrt{x}}{x(x\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1}=1$$

d'où f est dérivable à droite en $x_0=0$ et $f'_d(0)=1$.

2°/ $\Delta:\ y=f'(0)(x-0)+f(0)$ or $f(0)=-1$ et $f'(0)=1$ d'où $\Delta:\ y=x-1$.

3°/ $h(x)=f(x)-y=x-\dfrac{1}{x\sqrt{x}+1}-x+1=\dfrac{-1+x\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+1}$

$\forall x\geq0\ :\ h(x)=\dfrac{x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1}\geq0$ d'où C_f est au dessus de Δ.

4°/a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\dfrac{1}{x\sqrt{x}+1})=0$ d'où D : $y=x$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

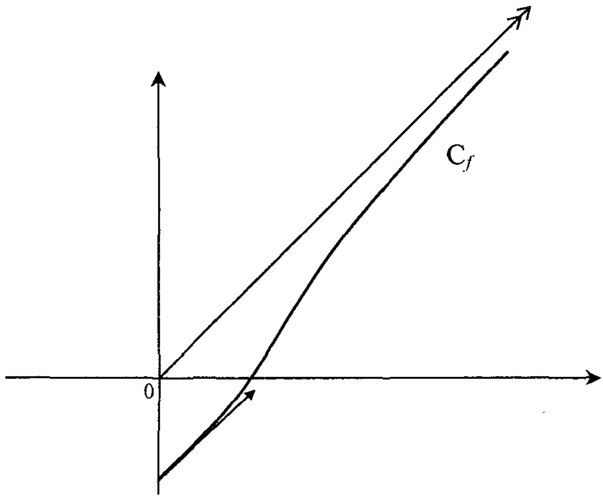
b) $k(x)=f(x)-y=f(x)-x=\dfrac{-1}{x\sqrt{x}+1}<0$ d'où C_f est au dessous de D.

5°/a) $\forall x\geq0\ :\ f'(x)=1+\dfrac{\frac{3}{2}\sqrt{x}}{(x\sqrt{x}+1)^2}>0$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	-1 ↗	$+\infty$

y = x

b)



Solution 14:

1°/ f est définie, continue, dérivable sur $[0,\pi]$,

$\forall x \in [0,\pi]$: $f'(x) = \dfrac{-1}{2}\sin x$

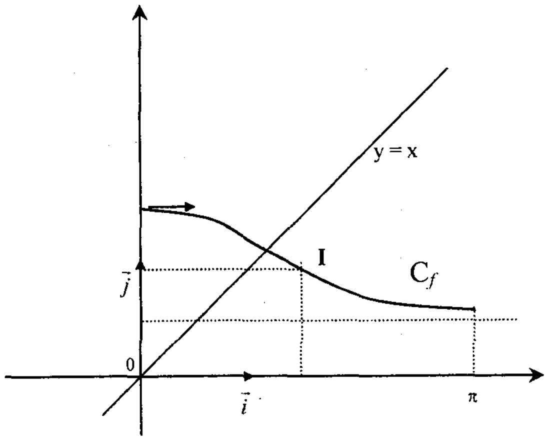
x	0		π
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

2°/ f' est dérivable sur $[0,\pi]$ et $\forall x \in [0,\pi]$: $f''(x) = \dfrac{-1}{2}\cos x$.

x	0		$\pi/2$		π
f''		$-$	0	$+$	

f'' s'annule une seule fois sur $[0,\pi]$ en changeant de signe donc C_f admet un seul point d'inflexion $I(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$ or $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ d'où $I(\frac{\pi}{2}, 1)$ est le seul point d'inflexion de C_f.

3°/



Solution 15 :

1°/ f est définie ,continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+1>0$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ , f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x(x+1)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1-x}{(x^2+1)^{3/2}}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	-2	↗	$\sqrt{2}-1$	↘	0

- $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}-1 = \lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}-1 = -2$$

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}-1 = 0$$

2°/

a) $T :\ y = f'(0)x + f(0) \Rightarrow y = x$

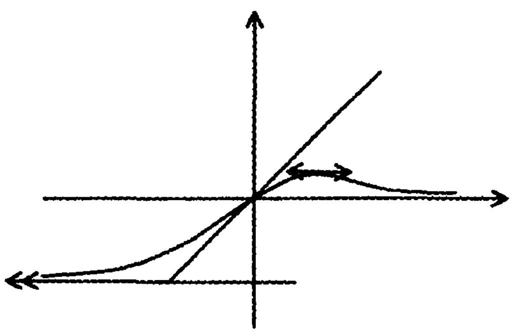
b) $f(x) - x = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 - x = (x+1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)$

$\Rightarrow f(x) - x = \dfrac{(x+1)(1-\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{-(x+1)x^2}{(1+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}}$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$-$	

- Sur $]-\infty,-1[$ on a : $f(x) - x > 0$ donc C_f est eu dessus de T .
- Sur $]-1,0[\ \cup\ ]0,+\infty[$ on a : $f(x) - x < 0$ donc C_f est au dessous de T .
- $C_f \cap T = \{ O(0,0) ; I(-1,-1) \}$.

3°/



4°/

a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 < U_n < 0$

- Pour $n = 0$, $U_0 = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow -1 < U_0 < 0$
- Supposons que pour un entier donné n , $-1 < U_n < 0$ et montrons que $-1 < U_{n+1} < 0$.

On a : $-1 < U_n < 0$ et comme f est strictement croissante sur $[-1 , 0]$ alors

$f(-1) < f(U_n) < f(0)$ or $f(-1) = -1$ et $f(0) = 0$

d'où $-1 < U_{n+1} < 0$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 < U_n < 0$.

Etudions le sens de variations de la suite (U_n) .

Soit $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n$

Or $f(x) - x < 0$ pour tout réel $x \in]-1, 0[$ et comme $U_n \in]-1, 0[$ donc $f(U_n) - U_n < 0$ et par suite $U_{n+1} - U_n < 0$ d'où (U_n) est une suite décroissante .

Conclusion : (U_n) est une suite décroissante minorée par -1 donc (U_n) est convergente .

$U_{n+1} = f(U_n)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} U_n = l$

f est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier en l donc $f(l) = l$

$$\Rightarrow \frac{l+1}{\sqrt{l^2+1}} = l+1 \Rightarrow (l+1)[1 - \sqrt{l^2+1}] = 0 \Rightarrow l = -1$$

d'où $l = 0$

Or on a : $U_0 = -\frac{1}{2}$ et (U_n) est une suite décroissante donc

$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow l \leq -\frac{1}{2}$ d'où $l = -1$.

5°/

a) $U_{n+1} + 1 = \dfrac{U_n + 1}{\sqrt{U_n^2 + 1}}$

Or on a : $-1 \leq U_n \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} \leq U_n^2 < 1 \Rightarrow \frac{5}{4} \leq U_n^2 + 1 < 2$

$\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{U_n^2+1} \leq \frac{4}{5} \Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{U_n^2+1}} \leq \sqrt{\frac{4}{5}}$ et comme $-1 < U_n < 0$

$\Rightarrow U_n + 1 > 0$ d'où $0 < \dfrac{U_n+1}{\sqrt{U_n^2+1}} \leq \dfrac{2\sqrt{5}}{5}(U_n + 1)$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < U_{n+1} + 1 \leq \dfrac{2\sqrt{5}}{5}(U_n + 1)$

b) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)^n$

- Pour n = 0 on a : $U_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow 0 < U_0 + 1 \leq \frac{1}{2}$

- Supposons que pour un entier donné n : $0 < U_n + 1 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^n$

et montrons que $0 < U_{n+1} + 1 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^{n+1}$

on a : $0 < U_{n+1} + 1 \leq \frac{2\sqrt{5}}{5}(U_n + 1) \Rightarrow 0 < U_{n+1} + 1 \leq \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^n$

$\Rightarrow 0 < U_{n+1} + 1 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^{n+1}$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n + 1 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^n$.

c) On a : $-1 < \frac{2\sqrt{5}}{5} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^n = 0$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n + 1) = 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -1$.

Solution 16 :

A)

1°/ a) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $x^2 + 1 > 0$ d'où f est définie sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$, $f_n(-x) = (-1)^n f_n(x)$

- Si n est pair , on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(-x) = f_n(x)$ d'où f_n est une fonction paire .
- Si n est impair , on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(-x) = -f_n(x)$ d'où f_n est une fonction impaire.

b) •Si n = 1 , $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$

D'où (C_1) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation y = 1 et au voisinage de $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation y = -1 .

• Si n = 2 , $f_n(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 0$

D'où y = x est une asymptote oblique à (C_2) au voisinage de $+\infty$

.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = +\infty$; $= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) + x = 0$

D'où y = - x est une asymptote à (C_2) au voisinage de $-\infty$.

• Si $n \geq 3$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = +\infty$ $(n \geq 3)$

$\Rightarrow$ (C_n) admet au voisinage de $\pm\infty$ une branche infinie parabolique de direction $(O, \vec{j})$.

2°/

a) $C_1 \cap C_2 = \{ O(0,0) ; A(1, \frac{\sqrt{2}}{2}) \}$

$f_n(0) = 0$, $f_n(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où (C_n) admet exactement deux points fixes O (0 , 0) et A $(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$

b) $d_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{x^2+1}}$

• *Si n est pair :*

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^n		$+$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$d_n(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Sur $]-\infty,1[\setminus\{0\}$: C_{n+1} est au dessous de C_n
Sur $]1, +\infty[$, C_{n+1} est au dessus de C_n
C_{n+1} et C_n se coupent en O et A .

• *Si n est impair :*

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^n		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$d_n(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Sur $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$, C_{n+1} est au dessus de C_n.
Sur $]0,1[$, C_{n+1} est au dessous de C_n
C_{n+1} et C_n se coupent en O et A.

3°/ • Si n est pair ($n \geq 2$) : $f_n'(x) = \dfrac{x^{n-1}(n+(n-1)x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

x		0	
x^{n-1}	$-$	0	$+$
$f_n(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

• Si n est impair ($n \neq 1$) :

x		0	
x^{n-1}	$+$	0	$+$
$f_n(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

• Si n = 1 , $f_n'(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	
$f_n(x)$	-1	$\nearrow$	1

B)

1°/ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n < 1$

Pour n = 0 , $0 < U_0 < 1$ est vraie par hypothèse .

Supposons que pour un entier donné n on a : $0 < U_n < 1$ et montrons que $0 < U_{n+1} < 1$.

On a : $0 < U_n < 1$ et f_k est strictement croissante sur]0, 1 [

Donc $f_k(0) < f_k(U_n) < f_k(1)$ or $f_k(0) = 0$ et $f_k(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1$ et

par suite $0 < U_{n+1} < 1$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n < 1$

2°/$U_{n+1} = f_k(U_n) = \dfrac{U_n(U_n)^{k-1}}{\sqrt{U_n^2+1}} = U_n \,.\, f_{k-1}(U_n)$ or $0 < U_n < 1 \Rightarrow$

$f_{k-1}(U_n) < f_{k-1}(1) \Rightarrow U_n \,.\, f_{k-1}(U_n) < U_n \,.\, f_{k-1}(1)$ d'où $U_{n+1} < \dfrac{U_n}{\sqrt{2}}$

3°/ a)$U_{n+1} < U_n \dfrac{1}{\sqrt{2}} < U_n$ d'où (U_n) est une suite décroissante .

b)On a : (U_n) est une suite décroissante , minorée par 0 donc (U_n) est convergente .

On a : $U_2 < \dfrac{1}{\sqrt{2}} U_1$

$U_3 < \dfrac{1}{\sqrt{2}} U_2$

$\vdots$

$\forall n \geq 2$, $U_n < \dfrac{1}{\sqrt{2}} U_{n-1}$

D'où en multipliant membre à membre ces inégalités on obtient :

$\forall n \geq 2$, $U_2 \,.\, U_3 \,.....\, U_n < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} U_1 \,.\, U_2 \,.\, U_3 \,.....\, U_{n-1}$ (car $U_k > 0$

pour $k \in \{ 1 , 2 , ... , n \}$) d'où $\forall n \geq 2$, $0 < U_n < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} U_1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ car $U_1 = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

FONCTIONS RECIPROQUES

résultats à retenir :

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I .
  On dit que f réalise une bijection de I sur $f(I)$ (ou que f est une bijection de I sur $f(I)$) , si pour tout y de $f(I)$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans I .
- Si f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I , alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.
- Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$. On appelle fonction réciproque de f et on note f^{-1} la fonction définie sur $f(I)$ qui à tout y de $f(I)$ associe l'unique solution dans I de l'équation $f(x) = y$.
- Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$ et f^{-1} sa fonction réciproque .
  Pour tout x de I et tout y de $f(I)$, $f(x) = y$, si et seulement si, $f^{-1}(y) = x$.
  $f^{-1} \circ f(x) = x$, pour tout x de I et $f \circ f^{-1}(y) = y$, pour tout y de $f(I)$.
- Les courbes respectives d'une bijection f et de sa réciproque f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite $\Delta : y = x$.
- Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors sa réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$ et varie dans le même sens que f .
- Soit f une fonction strictement monotone d'un intervalle I sur $f(I)$, a un réel de I et $b = f(a)$.
  Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

- Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$.
  Si f est dérivable sur I et $f'(x) \neq 0$ pour tout x de I, alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'\left[f^{-1}(y)\right]}$, pour tout y de $f(I)$.

- Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
  La fonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. Elle admet une fonction réciproque strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, appelée fonction racine $n^{ième}$.

- Pour tous réels positifs x et y, $y = x^n$, si et seulement si, $x = \sqrt[n]{y}$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
- Soit deux entiers n et p tels que $n \geq 2$ et $p \geq 2$ et deux réels positifs a et b. Alors :

$$\sqrt[n]{a^n} = a \;;\; \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \;;\; \sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} \;;\; \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p} \;;\; \left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p} \;;\; \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$$

Pour tout entier $n \geq 2$, la fonction $f : x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$. De plus, $f'(x) = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}\right)}$, pour tout $x > 0$.

- Soit u une fonction dérivable et positive sur un intervalle I et un entier $n \geq 2$.
  La fonction $f : x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est continue sur I et dérivable en tout réel x de I tel que $u(x) \neq 0$. De plus, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)^{n-1}}\right)}$, pour tout x de I tel que $u(x) > 0$.

EXERCICES

Exercice 1 :

Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

1°/ Montrer que f est continue sur **R**.
2°/ Etudier la dérivabilité de f en 0.
3°/ Calculer pour chaque $x \neq 0$, $f'(x)$.
4°/ a) Démontrer que f est strictement monotone sur **R**.
b) Montrer que f admet une fonction réciproque notée g.
c) Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}$, $g(x) = x \cdot |x|$.
5°/ a) Montrer que g est dérivable en 0.
b) Calculer $g'(x)$ pour $x \neq 0$.

Exercice 2 :

Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$$x \mapsto \sqrt{2x-4}+1$$

1°/ Préciser le domaine de définition D de f.

2°/ Montrer que f est continue sur D.

3°/ Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 2$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
4°/ Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} que l'on déterminera.

Exercice 3 :

Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$$x \mapsto x^3 + x + 1$$

1°/ Montrer que f est une bijection de **R** sur **R**.
2°/ Soit g la réciproque de f (on ne demande pas le calcul de $g(x)$).
a) Calculer $g(1)$.
b) Préciser le domaine de continuité et de dérivabilité de g.

c) Calculer $g'(1)$.

d) Ecrire une équation cartésienne de la tangente T à la courbe de g au point d'abscisse $x_0 = 1$.

Exercice 4 :

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$$

1°/ Etudier les variations de f.

2°/a) Ecrire une équation cartésienne de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0.

b) Etudier la position de C_f et T.

3°/ Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0,1]$.

a) Montrer que g est une bijection de $[0,1]$ sur lui-même.

b) Expliciter g^{-1}.

c) Calculer pour tout $x \in]0,1[$, $(g^{-1})'(x)$.

Exercice 5 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2+8} - x$.

1°/ Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$, on a : $f'(x) = -\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+8}}$.

2°/a) Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) > 0$.

b) En déduire que f est strictement décroissante sur $\mathbf{R}$.

3°/a) Montrer que f est une bijection de $\mathbf{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Expliciter f^{-1}.

Exercice 6 :

Soit la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \sqrt{x}$.

1°/ Etudier les variations de f sur $]1,+\infty[$.

2°/a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.

b) Montrer que $1{,}44 < \alpha < 2$.

3°/ Montrer que l'équation $f(x)=0$ est équivalente à l'équation:

$$(E): 1+\frac{1}{\sqrt{x}}=x$$

4°/ Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x}}$.

a) Vérifier que $g(\alpha)=\alpha$.

b) Montrer que g est une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Calculer $g^{-1}(x)$ pour chaque $x\in J$.

Exercice 7 :

Soit $g(x)=x^3-x^2+3x+1$.

1°/ a) Etudier les variations de g.

b) Montrer qu'il existe un seul réel α solution de $g(x)=0$.

c) Vérifier que $-\frac{1}{3}<\alpha<0$.

2°/ Etudier le signe de $g(x)$.

3°/ Soit $h(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3}$.

a) Vérifier que $h(\alpha)=\alpha$.

b) Etudier les variations de h.

Exercice 8 :

Soit la fonction φ définie sur $[0,\pi]$ par $\varphi(x)=1+4\cos x$.

1°/ Etudier les variations de φ sur $[0,\pi]$.

2°/ a) Montrer que l'équation $\varphi(x)=0$ admet une seule solution α.

b) Vérifier que $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{2\pi}{3}$.

c) Etudier le signe de $\varphi(x)$.

3°/ Soit $f:[0,\pi]\to\mathbf{R}$

$$x\mapsto 2\cos^2 x+\cos x-1$$

a) Montrer que f est dérivable sur $[0,\pi]$ et que :

$\forall x\in[0,\pi]$: $f'(x)=-\sin x\cdot\varphi(x)$.

b) Calculer $f(\alpha)$.

c) Etudier les variations de f sur $[0,\pi]$.

Exercice 9 :

Soit $f:\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \sqrt{x}+2x+1$$

1°/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter géométriquement le résultat trouvé.

2°/ Etudier les variations de f.

3°/ Montrer que f est une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur un intervalle J que l'on précisera.

4°/ Expliciter f^{-1}.

Exercice 10 :

Soit $f:[0,\pi]\to\mathbf{R}$

$$x \mapsto 2\cos x+3$$

1°/ Etudier les variations de f sur $[0,\pi]$.

2°/ Montrer que f est une bijection de $[0,\pi]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3°/ Soit $g=f^{-1}$.

a) Calculer $g(5)$ et $g(3)$.

b) Montrer que g est dérivable sur $]1,5[$.

4°/ Montrer que $\forall x\in\ ]1,5[,\ g'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{-x^2+6x-5}}$.

Exercice 11 :

Soit $f:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to\mathbf{R}$

$$x \mapsto \frac{\sin x}{2+\sin x}$$

1°/ Etudier les variations de f.

2°/ Montrer que f est une bijection de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3°/ Soit g la réciproque de f.

a) Calculer $g(0)$ et $g(\frac{1}{5})$.

b) Montrer que g est dérivable sur $]-1,\frac{1}{3}[$.

4°/ Montrer que $\forall x \in\ ]-1,\frac{1}{3}[$ on a : $g'(x)=\dfrac{2}{(1-x)\sqrt{-3x^2-2x+1}}$.

Exercice 12 :

Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

1°/ Montrer que f est dérivable sur **R** et que $\forall x \in \mathbf{R}$,

$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(x^2+2x+2)^3}}$.

2°/ a) Etudier les variations de f.

b) Montrer que f est une bijection de **R** sur $]-1,1[$.

3°/a) Montrer que $\forall x \in\ ]-1,1[$ on a : $f(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}-1)=x$.

b) En déduire l'expression de f^{-1}.

Exercice 13 :

Soit g la fonction définie sur **R** par : $g(x)=\dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}}-\dfrac{1}{2}$.

1°/ Etudier les variations de g.

2°/ Montrer que g est une bijection de **R** sur $]-1,0[$.

3°/ Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$$x \mapsto \frac{-x}{2}+1+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$$

a) Montrer que f est dérivable sur **R** et que $\forall x \in \mathbf{R}$, $f'(x)=g(x)$.

b) Etudier les variations de f.

c) Montrer que f est une bijection de **R** sur un intervalle E que l'on précisera.

4°/ Montrer que $\forall x \in \mathbf{E}$ on a : $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{4(x-1)}+1-x$.

Exercice 14 :

Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x - x^2}$.

1°/ Etudier la dérivabilité de f.

2°/ Etudier les variations de f.

3°/ Résoudre dans **R** l'équation : $f(x) = x$.

4°/ Soit φ la restriction de f à $[0,1]$.

a) Montrer que φ est une bijection de $[0,1]$ sur un intervalle J que l'on préc

b) Expliciter φ^{-1} .

Exercice 15 :

Soit $g(x) = x^3 + 12x - 2$.

1°/ Etudier les variations de g.

2°/ a) Montrer qu'il existe un seul réel α tel que $g(\alpha)=0$ et que $0 < \alpha < 1$.

b) Etudier le signe de $g(x)$.

3°/ Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 4}$.

a) Montrer que f est dérivable sur **R** et que $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = \dfrac{x \cdot g(x)}{(x^2+4)^2}$.

b) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{3 - 12\alpha}{\alpha^2 + 4}$.

4°/ Etudier les variations de f.

Exercice 16 :

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

1°/ Etudier les variations de f et en déduire $f(\mathbf{R})$.

2°/ Soit (E) : $f(x) = x$.

Montrer que (E) est équivalente à $g(x) = 0$ où g est une fonction polynôme de 3° degré.

3°/ Déterminer le nombre de solutions de l'équation (E). Interpréter géométriquement .

4°/ Soit φ la restriction de f à l'intervalle $\mathbf{R}_+$.

a) Prouver que φ est une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Expliciter φ^{-1}.

Exercice 17 :

Soit $\alpha \in]0,1[$ et $\varphi_\alpha : [0,\pi] \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \alpha\cos(\alpha x)\sin x - \sin(\alpha x)\cos x$$

1°/a) Etudier les variations de φ_α sur $[0,\pi]$.

b) Montrer que $\forall x \in [0,\pi]$, on a : $\varphi_\alpha(x) > 0$.

2°/ Soit $f_\alpha :]0,\pi[\to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \frac{\sin(\alpha x)}{\sin x}$$

a) Calculer $\lim\limits_{0^+} f_\alpha$ et $\lim\limits_{\pi^-} f_\alpha$.

b) Etudier les variations de f_α.

c) Vérifier que $f_\alpha(x) = \alpha + \dfrac{1-\alpha^2}{2}$. Montrer que (E) a une seule solution dans l'intervalle $]0,\pi[$.

Exercice 18 :

Soit $f :]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \tan x$$

1°/a) Etudier les variations de f.

b) Donner l'équation de la tangente (Δ) à C_f au point $x_0 = 0$.

c) Etudier la position de C_f et (Δ).

2°/a) Montrer que f est une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbf{R}$.

b) On note g la réciproque de f.

Prouver que g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que : $\forall x \in \mathbf{R}$, $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

3°/a) Prouver que g est une fonction impaire.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x}$.

4°/ a) Montrer que $\forall x > 0$ on a : $0 < x - g(x) < \frac{x^2}{3}$.

b) Calculer alors $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x) - x}{x^2}$.

5°/ Soit $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Prouver que ϕ est paire.
b) Montrer que ϕ est continue sur $\mathbf{R}$.
c) Montrer que ϕ est dérivable sur $\mathbf{R}$.
d) Calculer $\lim\limits_{-\infty} \phi$ et $\lim\limits_{+\infty} \phi$.

Exercice 19 :

Soit $f :]0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \frac{\sqrt{\sin 2x}}{\sin x}.$$

1°/ a) Montrer que f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Etudier la dérivabilité de f en $\frac{\pi}{2}$.

b) Etudier les variations de f.

2°/ Montrer que f est une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3°/ Soit g la réciproque de f.
a) Préciser le domaine de continuité, de dérivabilité de g.
b) Calculer $g'(x)$ pour chaque $x > 0$.

4°/ Soit $\varphi(x) = g(\sqrt{2x}) + g(\sqrt{\frac{2}{x}})$.

a) Montrer que φ est dérivable sur $]0, +\infty[$.
b) Calculer $\varphi'(x)$ pour $x > 0$. Que vaut $\varphi(1)$?
c) Calculer enfin $\varphi(x)$ pour $x > 0$.

Exercice 20 :

Soit un entier $n \geq 2$ et $\varphi_n : [0,\frac{\pi}{2}[\to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \sqrt[n]{\operatorname{tg} x}$$

1°/a) Etudier les variations de φ_n sur $[0,\frac{\pi}{2}[$.

b) Montrer que φ_n est une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J à préciser. On note ψ_n la fonction réciproque de φ_n.

c) Déterminer le domaine E′ de dérivabilité de ψ_n.

d) Montrer que $\forall x \in E'$ on a : $\psi_n'(x) = \frac{nx^{n-1}}{1+x^{2n}}$.

2°/ Soit N : $[0,\frac{\pi}{2}[\to \mathbf{R}$

$$x \mapsto 1 + \operatorname{tg}^2 x - 2\sqrt{\operatorname{tg} x}$$

a) Montrer que N est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et que l'équation $(x \in]0,\frac{\pi}{2}[$ et $N'(x) = 0)$ admet une unique solution notée x_0. Calculer $N(x_0)$.

b) En déduire que l'équation $N(x) = 0$ admet deux solutions dans $[0,\frac{\pi}{2}[$. (On remarquera que $N(\frac{\pi}{4}) = 0$).

c) Soit $f : [0,\frac{\pi}{2}[\to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \sqrt{\operatorname{tg} x} - x$$

Etudier les variations de f. En déduire le signe de $f(x)$.

Exercice 21 :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & pour\ x > 0 \\ f(x) = \dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}} & pour\ x \leq 0 \end{cases}$$

1°/ Montrer que f est continue en 0

2°/Montrer que f est dérivable en 0 et que vaut f_0'

3°/ a)Montrer que D : $y = \frac{1}{2}x$ est la tangente à Cf au point d'abscisse 0 .

b) Etudier les variations de f

4°/

a) Etudier les variations de f

b) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur J .

Exercice 22 :

A. Soit la fonction h définie sur **R** par : $h(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 3$.

1°/ Etudier les variations de h.

2°/a) Montrer qu'il existe un seul réel α tel que $h(\alpha) = 0$.

b) Encadrer α à 0,1 près.

3°/ Etudier le signe de $h(x)$.

B. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x}{(x-1)^2}$.

1°/ Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ et que $\forall x \neq 1$ on a :

$$f'(x) = \frac{h(x)}{(x-1)^3}.$$

2°/ Etudier les variations de f.

3°/ Montrer que C_f admet un asymptote oblique Δ.

4°/a) Etudier la position de C_f et Δ.

b)Tracer C_f dans un plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 23 :

A) Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 2x - \sin x$

1°/ Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}$, $2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1$

2°/ On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soient les droites $D_1 : y = 2x - 1$ et $D_2 : y = 2x + 1$

Déterminer les points communs à (C) et D_1 d'une part, à (C) et D_2 d'autre part. Préciser les tangentes à (C) à ces points.

3°/

a) Etudier la parité de f.

b) Interpréter géométriquement ce résultat.

4°/

a) Calculer $f(x+2\pi)$ en fonction de $f(x)$

b) Par quelle transformation géométrique passe-t-on de la partie représentant la restriction de à $[-\pi+2k\pi\ ,\ \pi+2k\pi]$? ($k\in\mathbb{Z}$)

B)

1°/ Montrer que f admet une application réciproque g.

2°/ Démontrer $g(0)$, $g(2\pi)$ et $g(4k\pi)$ ($k\in\mathbb{Z}$).

3°/

a) Préciser le domaine de dérivabilité de g

b) Que vaut $g'(0)$ et $g'(2\pi)$.

4°/ Montrer que l'équation $2x-\sin x=m$ admet une solution unique x_m.

On notera α la solution de l'équation $2x-\sin x=4$.

C)

1°/ Soit $\varnothing:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:\ x\mapsto\frac{1}{2}(4+\sin x)$

a) Montrer que l'équation $f(x)=4$ est équivalnte à $\varnothing(x)=x$

b) Montrer que $\forall x\in\ ,\ |\varnothing'(x)|\leq\frac{1}{2}$

2°/ Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$U_0\in\mathbb{R}$ et $\forall n\in\mathbb{N}, U_{n+1}=\varnothing(U_n)$

a) Prouver que $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ |U_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|U_n-\alpha|$

b) Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel que l'on précisera .

SOLUTIONS

Solution 1 :

1°/• La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur **R**.

• $\forall x \in \mathbf{R}$, $|x| \geq 0$ donc la fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$ est continue sur **R**.

• La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbf{R}^*$ donc f est continue sur $\mathbf{R}^*$ comme produit de ces fonctions continues.

• $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x\sqrt{|x|}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{|x|} = 0$.

• $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-x\sqrt{|x|}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} -\sqrt{|x|} = 0$.

d'où $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$ donc f est continue en 0 et par suite f est continue sur **R**.

2°/ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|\sqrt{|x|}}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = +\infty$ donc f n'est pas dérivable en 0.

3°/• $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

• $\forall x \in \mathbf{R}_-^*$, $f(x) = -\sqrt{-x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{-1}{2\sqrt{-x}} = \frac{1}{2\sqrt{-x}}$

d'où $\forall x \in \mathbf{R}^*$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{|x|}}$.

4°/a) On a : $\forall x \in \mathbf{R}^*$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{|x|}} > 0$ donc f est strictement croissante sur **R**.

b) f est continue et strictement croissante sur **R** donc f réalise une bijection de **R** sur $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ ce qui donne que f admet une fonction réciproque définie sur **R**.

c) $f^{-1}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$x\mapsto f^{-1}(x)=y$.

$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$.

• Pour $x=0$ on a $f^{-1}(0)=0$ car $f(0)=0$.

• Pour $x\neq 0$, on a $y\neq 0 \Rightarrow \frac{|y|}{y}\sqrt{|y|}=x \Rightarrow (\frac{|y|\sqrt{|y|}}{y})^2=x^2 \Rightarrow$

$|y|=x^2$.

• Si $x>0 \Rightarrow f^{-1}(x)>f^{-1}(0)$ or $f^{-1}(0)=0 \Rightarrow f^{-1}(x)>0 \Rightarrow y>0$

$\Rightarrow y=x^2=x\cdot|x|$.

• Si $x<0 \Rightarrow f^{-1}(x)<f^{-1}(0)$ or $f^{-1}(x)<0 \Rightarrow y<0$

$\Rightarrow y=-x^2=x\cdot|x|$.

Conclusion : $\forall x\in\mathbf{R},\ g(x)=x|x|$.

5°/a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ donc g est dérivable en 0 et $g'(0)=0$.

b) • $\forall x\in\mathbf{R}_+^*,\ g(x)=x^2 \Rightarrow g'(x)=2x$.

• $\forall x\in\mathbf{R}_-^*,\ g(x)=-x^2 \Rightarrow g'(x)=-2x$.

Donc $\forall x\in\mathbf{R}^*,\ g'(x)=2|x|$.

Solution 2 :

1°/ $D=\{x\in\mathbf{R}$ telque $2x-4\geq 0\}$.

$2x-4\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2$ donc $D=[2,+\infty[$.

2°/ La fonction $x\mapsto 2x-4$ est continue sur D et $\forall x\in D,\ 2x-4\geq 0$ donc la fonction $x\mapsto\sqrt{2x-4}$ est continue sur D comme composée de deux fonctions continues sur D et par suite f est continue sur D comme somme de deux fonctions continues sur D.

3°/ $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{2x-4}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}}=+\infty$

car : $\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}=0^+$.

Donc f n'est pas dérivable à droite en 2 et par suite la courbe de f admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 2.

4°/• f est dérivable sur $]2,+\infty[$ et $\forall x \in]2,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-4}}$;

$\forall x \in \mathbf{R}_+$, $f'(x)>0$ donc f est strictement croissante sur $[2,+\infty[$ et comme f est continue sur $[2,+\infty[$ donc f réalise une bijection de $[2,+\infty[$ sur $[f(2)\,;\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[=[1,+\infty[$.

• $f^{-1}:[1,+\infty[\to [2,+\infty[$

$$x \mapsto f^{-1}(x)=y$$

$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow \sqrt{2y-4}+1=x \Leftrightarrow \sqrt{2y-4}=x-1 \Leftrightarrow$

$(2y-4)=(x-1)^2 \Leftrightarrow y=\dfrac{(x-1)^2+4}{2}=\dfrac{1}{2}(x-1)^2+2$.

Conclusion : $\forall x \in [1,+\infty[$, $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)^2+2$.

Solution 3 :

1°/• f est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$, $f'(x)=3x^2+1>0$.

• f est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$ donc f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[=\mathbf{R}$.

2°/a) $g(1)=x \Leftrightarrow f(x)=1 \Leftrightarrow x^3+x+1=1 \Leftrightarrow x(x^2+1)=0 \Leftrightarrow x=0$ donc $g(1)=0$.

b) • f est continue sur $\mathbf{R}$ donc g est continue sur $f(\mathbf{R})=\mathbf{R}$.

• f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$, $f'(x)\neq 0$ donc g est dérivable sur $f(\mathbf{R})=\mathbf{R}$.

c) $g'(1)=\dfrac{1}{f'[g(1)]}=\dfrac{1}{f'(0)}$ or $f'(0)=1$ d'où $g'(1)=1$.

d) T : $y=g'(1)(x-1)+g(1)$ or $g'(1)=1$ et $g(1)=0$ d'où T : $y=x-1$.

Solution 4 :

1°/ f est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}-\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2°/a) T : $y = f'(0)(x-0)+f(0)$ or $f'(0)=2$ et $f(0)=0$ d'où T : $y=2x$.

b) • Etudions le signe de $f(x)-2x$.

$$f(x)-2x = \frac{2x}{x^2+1} - 2x = 2x(\frac{1}{x^2+1} - 1) = -2x(\frac{x^2}{x^2+1}).$$

Le signe de $f(x)-2x$ est celui de $-x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-2x$		$+$	0	$-$	

• Sur $]-\infty,0[$, C_f est au dessus de T.

• Sur $]0,+\infty[$, C_f est au dessous de T.

• C_f et T se coupent en $O(0,0)$.

3°/a) g est continue et strictement croissante sur $[0,1]$ donc g réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[f(0),f(1)] = [0,1]$.

b) $g^{-1} : [0,1] \to [0,1]$

$$x \mapsto g^{-1}(x) = y$$

$$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(x) = x \Leftrightarrow \frac{2y}{y^2+1} = x \Leftrightarrow 2y = xy^2 + x \Leftrightarrow$$

$xy^2 - 2y + x = 0$.

• Pour $x=0$ on a : $y=0$.

• Pour $x \in]0,1]$, $\Delta' = 1-x^2 \geq 0$ d'où $y' = \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ et

$y''=\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$ or $x\in]0,1] \Rightarrow x\leq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x}\geq 1$ et $1+\sqrt{1-x^2}\geq 1$

donc $\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\geq 1$ et par suite la solution y'' est à rejeter car $y\in[0,1]$.

Conclusion : $g^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & si\ x\in]0,1]\\ 0 & si\ x=0\end{cases}$

c) • g est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x\in[0,1]$, $g'(x)\neq 0$ donc g^{-1} est dérivable sur $g([0,1])=[0,1]$.

• Pour $x\in\ ]0,1]$, on a $g^{-1}(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ donc :

$$(g^{-1})'(x)=\frac{-\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot x-1+\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}.$$

• Pour $x=0$ on a : $(g^{-1})'(0)=\dfrac{1}{g'[g^{-1}(0)]}=\dfrac{1}{g'(0)}$ or $g'(0)=2$

d'où $(g^{-1})'(0)=\dfrac{1}{2}$.

Conclusion : $(g^{-1})'(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}} & si\ x\in]0,2]\\ \dfrac{1}{2} & si\ x=0\end{cases}$

Solution 5 :

1°/• La fonction $x\mapsto x^2+8$ est dérivable sur **R** et $\forall x\in\mathbf{R}$, $x^2+8>0$ donc la fonction $x\mapsto\sqrt{x^2+8}$ est dérivable sur **R**.

• La fonction $x\mapsto -x$ est dérivable sur **R** donc f est dérivable sur **R** comme somme de ces deux fonctions dérivables.

• $\forall x\in\mathbf{R}$, $f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+8}}-1=\dfrac{x-\sqrt{x^2+8}}{\sqrt{x^2+8}}=-\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+8}}$.

2°/a) $\forall x \in \mathbf{R}$, on a : $x^2+8>x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+8}>|x|$ or $|x| \geq x$ donc $\sqrt{x^2+8}>x$ d'où $\sqrt{x^2+8}-x>0$ et par suite $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x)>0$.

b) on a $\forall x \in \mathbf{R}$, $f'(x)=-\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+8}}$ et $f(x)>0$ donc $\forall x \in \mathbf{R}$, $f'(x)<0$ et par suite f est strictement décroissante sur **R**.

3°/a) f est continue et strictement décroissante sur **R** donc f réalise une bijection de **R** sur l'intervalle $J=]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+8}-x=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+8}-x=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-8-x^2}{\sqrt{x^2-8}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-8}{\sqrt{x^2+8}+x}=0$

donc $J=]0,+\infty[$.

b) $f^{-1}:]0,+\infty[\to \mathbf{R}$

$$x \mapsto f^{-1}(x)=y$$

$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow \sqrt{y^2+8}-y=x \Leftrightarrow \sqrt{y^2+8}=x+y \Rightarrow$

$y^2+8=(x+y)^2 \Rightarrow y^2+8=x^2+y^2+2xy \Rightarrow y=\dfrac{8-x^2}{2x}$

donc $\forall x \in]0,+\infty[$, $f^{-1}(x)=\dfrac{8-x^2}{2x}$.

Solution 6 :

1°/ f est définie, continue et dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\forall x \in]1,+\infty[$,

$f'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}<0$.

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

2°/a) f est continue et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ donc f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur **R** et comme $0 \in \mathbf{R}$ donc 0 admet un seul antécédent $\alpha \in \,]1,+\infty[$ par f et par suite l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in \,]1,+\infty[$.

b) On a $\begin{cases} f(1{,}44)\cdot f(2)<0 \quad et \\ f \text{ est continue sur } [1{,}44\,;2] \end{cases}$ donc $1{,}44<\alpha<2$.

3°/ $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x-1}=\sqrt{x} \Leftrightarrow x-1=\dfrac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=x$.

4°/a) On a $f(\alpha)=0 \Rightarrow 1+\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}=\alpha \Rightarrow g(\alpha)=\alpha$.

b) • g est définie, continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$\forall x\in\,]0,+\infty[,\ g'(x)=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}<0$ donc g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et comme g est continue sur $]0,+\infty[$ donc g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur l'intervalle

$J=]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x), \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)[$.

or $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ donc $J=]1,+\infty[$.

c) $g^{-1}:]1,+\infty[\to]0,+\infty[$

$x \mapsto g^{-1}(x)=y$

$g^{-1}(x)=y \Leftrightarrow g(y)=x \Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{\sqrt{y}}=x \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{y}}=x-1 \Leftrightarrow$

$\sqrt{y}=\dfrac{1}{x-1} \Rightarrow y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ d'où $\forall x\in\,]1,+\infty[,\ g^{-1}(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

Solution 7 :

1°/a) g est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x\in\mathbf{R}$,

$g'(x)=3x^2-2x+3 \quad \Delta'=-8<0$ donc $\forall x\in\mathbf{R},\ g'(x)>0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

b) g est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$ donc g réalise un bijection de $\mathbf{R}$ sur $g(\mathbf{R})=\mathbf{R}$ et comme $0\in\mathbf{R}$ donc 0 admet un seul antécédent $\alpha\in\mathbf{R}$ par g et par conséquent il existe un seul réel α solution de l'équation $g(x)=0$.

c) On a : $\begin{cases} g(-\frac{1}{3})\cdot g(0)<0 \quad et \\ g \text{ est continue sur } [-\frac{1}{3},0\,] \end{cases}$ donc $-\frac{1}{3}<\alpha<0$.

2°/ D'après le tableau de variations de g on a :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $-$	0	$+$ $\nearrow$	$+\infty$

d'où :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

3°/a) on a $g(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha^3-\alpha^2+3\alpha+1=0 \Rightarrow \alpha(\alpha^2+3)=\alpha^2-1$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+3} \text{ d'où } h(\alpha)=\alpha .$$

b) h est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x\in \mathrm{R}$,

$$h'(x)=\frac{2x(x^2+3)-2x(x^2-1)}{(x^2+3)^2}=\frac{8x}{(x^2+3)^2}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1

Solution 8 :

1°/ φ est définie, continue et dérivable sur $[0,\pi]$ et $\forall x \in [0,\pi]$, $\varphi'(x) = -4\sin x \leq 0$

x	0		π
$\varphi'(x)$	0	$-$	0
$\varphi(x)$	5	$\searrow$	-3

2°/a) φ est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$ donc φ réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-3,5]$ et comme $0 \in [-3,5]$ donc 0 admet un seul antécédent $\alpha \in [0,\pi]$ par φ et par suite l'équation $\varphi(x) = 0$, admet une seule solution $\alpha \in [0,\pi]$.

b) on a : $\begin{cases} \varphi(\frac{\pi}{2}) \cdot \varphi(\frac{2\pi}{3}) < 0 \ \ et \\ \varphi \text{ est continue sur } [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \end{cases}$ donc $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$.

c) D'après le tableau des variations de φ on a :

x	0		α		π
$\varphi(x)$	5	$+$	0	$-$	-3

x	0		α		π
$\varphi(x)$		$+$	0	$-$	

3°/a) La fonction $x \mapsto \cos x$ est dérivable sur **R** et en particulier sur $[0,\pi]$; et la fonction $x \mapsto 2x^2 + x - 1$ est dérivable sur **R** donc f est dérivable sur $[0,\pi]$ comme composée de ces deux fonctions ; et $\forall x \in [0,\pi]$,

$f'(x) = -4\cos x \cdot \sin x - \sin x = -\sin x \cdot (4\cos x + 1) = -\sin x \cdot \varphi(x)$.

b) $f(\alpha)=2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1$ or $\varphi(\alpha)=0 \Rightarrow 1+4\cos\alpha=0 \Rightarrow$ $\cos\alpha=-\frac{1}{4}$ d'où $f(\alpha)=2(-\frac{1}{4})^2-\frac{1}{4}-1=-\frac{9}{8}$.

c) f est définie, continue et dérivable sur $[0,\pi]$ et $\forall x\in[0,\pi]$, $f'(x)=-\sin x\cdot\varphi(x)$ or sur $[0,\pi]$, $\sin x\geq 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-\varphi(x)$ d'où le tableau des variations de f :

x	0		α		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\frac{9}{8}$	$\nearrow$	0

Solution 9 :

1°/

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}+2x}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}(1+2\sqrt{x})}{\sqrt{x}^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{1+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=+\infty$$

donc f n'est pas dérivable à droite en 0, et par conséquent la courbe de f admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 0.

2°/ f est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et $\forall x\in\mathbf{R}_+$,

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+2>0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3°/ f est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$ donc f réalise une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $f(\mathbf{R}_+)=[1,+\infty[$.

4°/ $f^{-1}:[1,+\infty[\to\mathbf{R}_+$

$x\mapsto f^{-1}(x)=y$

$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow \sqrt{y}+2y+1=x$.

Posons $t=\sqrt{y} \Rightarrow$ l'équation devient : $2t^2+t+1-x=0$

$$\Delta = 8x-7 \Rightarrow t' = \frac{-1-\sqrt{8x-7}}{4} \text{ et } t'' = \frac{-1+\sqrt{8x-7}}{4}$$

On a $t'<0$ donc cette solution est à rejeter d'où $\sqrt{y} = \dfrac{-1+\sqrt{8x-7}}{4}$

et par suite $y = (\dfrac{\sqrt{8x-7}-1}{4})^2 = \dfrac{4x-3-\sqrt{8x-7}}{8}$.

Conclusion : $\forall x \in [1,+\infty[$, $f^{-1}(x) = \dfrac{4x-3-\sqrt{8x-7}}{8}$.

Solution 10 :

1°/ f est définie, continue et dérivable sur $[0,\pi]$ et $\forall x \in [0,\pi]$, $f'(x) = -2\sin x$. Or $\forall x \in [0,\pi]$, $\sin x \geq 0$ d'où $\forall x \in [0,\pi]$, $f'(x) \leq 0$.

x	0		π
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	5	$\searrow$	1

2°/ f est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$ donc f réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $f([0,\pi]) = [1,5]$.

3°/a) • $g(5) = x \Leftrightarrow f(x) = 5 \Leftrightarrow 2\cos x + 3 = 5 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ (car $x \in [0,\pi]$) donc $g(5) = 0$.

• $g(3) = x \Leftrightarrow f(x) = 3 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$ donc $g(3) = \dfrac{\pi}{2}$

(car $x \in [0,\pi]$).

b) f est dérivable sur $]0,\pi[$ et $\forall x \in]0,\pi[$, $f'(x) \neq 0$ donc g est dérivable sur $f(]0,\pi[) =]1,5[$.

4°/ Soit $x \in]1,5[$, $g'(x) = \dfrac{1}{f'[f^{-1}(x)]} = \dfrac{1}{f'[g(x)]} = \dfrac{-1}{2\sin[g(x)]} = \dfrac{-1}{2\sin y}$

avec $y = g(x)$.

On a : $y = g(x) \Rightarrow x = f(y) \Rightarrow 2\cos y + 3 = x \Rightarrow \cos y = \dfrac{x-3}{2} \Rightarrow$

$\cos^2 y = \dfrac{(x-3)^2}{4} \Rightarrow 1 - \sin^2 y = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{4} \Rightarrow \sin^2 y = \dfrac{-x^2 + 6x - 5}{4}$

$\Rightarrow \sin y = \dfrac{\sqrt{-x^2 + 6x - 5}}{2}$ car $y \in]0, \pi[$.

D'où : $g'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{-x^2 + 6x - 5}}$.

Solution 11 :

1°/ f est définie, continue et dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

$f'(x) = \dfrac{\cos x(2 + \sin x) - \cos x \sin x}{(2 + \sin x)^2} = \dfrac{2\cos x}{(2 + \sin x)^2}$. Le signe de $f'(x)$

est celui de $\cos x$. Or $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\cos x \geq 0$

x	$-\pi/2$		$\pi/2$
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$

2°/ f est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc f réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $f([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, \frac{1}{3}]$.

3°/a) • $g(0) = x \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (car $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) donc $g(0) = 0$.

• $g(\frac{1}{5}) = x \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \dfrac{\sin x}{2 + \sin x} = \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow 5\sin x = 2 + \sin x$

$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$ d'où $g(\frac{1}{5}) = \frac{\pi}{6}$.

b) f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et $\forall x\in\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $f'(x)\neq 0$ donc g est dérivable sur $f(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[)=]-1,\frac{1}{3}[$.

4°/ Soit $x\in\,]-1,\frac{1}{3}[$, $g'(x)=\dfrac{1}{f'[g(x)]}$.

Posons $g(x)=y\Rightarrow g'(x)=\dfrac{1}{f'(y)}=\dfrac{(2+\sin y)^2}{2\cos y}$.

Or $g(x)=y\Rightarrow f(y)=x\Rightarrow \dfrac{\sin y}{2+\sin y}=x\Rightarrow \sin y=2x+x\sin y$

$\Rightarrow \sin y=\dfrac{2x}{1-x}\Rightarrow (2+\sin y)^2=\dfrac{4}{(1-x)^2}$ et $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}$

$\Rightarrow \cos y=\sqrt{1-\dfrac{4x^2}{(1-x)^2}}=\dfrac{\sqrt{1-2x-3x^2}}{|1-x|}=\dfrac{\sqrt{1-2x-3x^2}}{1-x}$ (car $x\in]-1,\frac{1}{3}[$)

$$g'(x)=\dfrac{\dfrac{4}{(1-x)^2}}{\dfrac{2\sqrt{1-2x-3x^2}}{1-x}}=\dfrac{2}{(1-x)\sqrt{-3x^2-2x+1}}.$$

Conclusion : $\forall x\in]-1,\frac{1}{3}[$, $g'(x)=\dfrac{2}{(1-x)\sqrt{-3x^2-2x+1}}$.

Solution 12 :

1°/• On a $\forall x\in\mathbf{R}$, $x^2+2x+2>0$ (car $\Delta<0$) donc la fonction $x\mapsto\sqrt{x^2+2x+2}$ est dérivable sur **R** et comme la fonction $x\mapsto x+1$ est dérivable sur **R** donc f est dérivable sur **R** comme quotient de ces 2 fonctions.

• $\forall x\in\mathbf{R}$, $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2x+2}-\dfrac{2(x+1)}{2\sqrt{x^2+2x+2}}\cdot(x+1)}{x^2+2x+2}$

$$=\dfrac{x^2+2x+2-(x+1)^2}{\sqrt{(x^2+2x+2)^2}\cdot\sqrt{x^2+2x+2}}=\dfrac{1}{\sqrt{(x^2+2x+2)^3}}.$$

2°/a) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+2x+2)^3}} > 0.$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x(1+\frac{1}{x})}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}} = -1.$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x(1+\frac{1}{x})}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}} = 1.$

b) f est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$ donc f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $f(\mathbf{R}) =]-1,1[$.

3°/a) $$f\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-1\right) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-1+1}{\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)^2+2\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)+2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}-\cancel{\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}}+1+\cancel{\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}}}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}} = x.$$

b) on a $\forall x \in]-1,1[$, $f\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-1\right) = x \Rightarrow$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - 1.$$

Solution 13 :

1°/ g est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$g'(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot x}{x^2+1}\right]=\frac{1}{2}\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{(x^2+1)^3}}>0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	0

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{-2x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}-\dfrac{1}{2}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{1}{2\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}-\dfrac{1}{2}=-1$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}-\dfrac{1}{2}=0$.

2°/ g est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$ donc g réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $g(\mathbf{R})=]-1,0[$.

3°/a) On a : $\forall x\in\mathbf{R},\ x^2+1>0$ donc la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et comme la fonction $x\mapsto\dfrac{-x}{2}+1$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme somme de ces 2 fonction dérivables.

$\forall x\in\mathbf{R},\ f'(x)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=g(x)$.

b) On a $g(\mathbf{R})=]-1,0[$ donc $\forall x\in\mathbf{R},\ g(x)<0$ et par suite $\forall x\in\mathbf{R}$, $f'(x)<0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{2}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=1$.

c) f est continue et strictement décroissante sur $\mathbf{R}$ donc f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $f(\mathbf{R})=]1,+\infty[$.

4°/ $f^{-1}:]1,+\infty[\to\mathbf{R}$

$$x\mapsto f^{-1}(x)=y.$$

$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow -\frac{y}{2}+1+\frac{1}{2}\sqrt{y^2+1}=x \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}\sqrt{y^2+1}=x-1+\frac{y}{2} \Rightarrow \frac{y^2+1}{4}=(x-1)^2+(x-1)\cdot y+\frac{y^2}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\frac{1}{4(x-1)}+1-x$.

Conclusion : $\forall x\in]1,+\infty[,\ f^{-1}(x)=\frac{1}{4(x-1)}+1-x$.

Solution 14 :

1°/a) • La fonction $x\mapsto 2x-x^2$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et

$\forall x\in]0,2[,\ 2x-x^2>0$ donc f est dérivable sur $]0,2[$.

• Dérivabilité de f à droite en 0 :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to0^+}\sqrt{\frac{2x-x^2}{x^2}}$$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{\frac{2}{x}-1}=+\infty$ donc f n'est pas dérivable à droite en 0.

• Dérivabilité de f à gauche en 2 :

$$\lim_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{2x-x^2}{(x-2)\sqrt{2x-x^2}} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-x}{\sqrt{2x-x^2}} = -\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en 2.
Conclusion : Le domaine de dérivabilité de f est $]0,2[$.
2°/ f est définie et continue sur $[0,2]$ et dérivable sur $]0,2[$ et :

$$\forall x \in \,]0,2[, \; f'(x) = \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	

D'où le tableau des variations de f :

x	0		1		2
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	0	↗	1	↘	0

3°/ $f(x)=x \Leftrightarrow \sqrt{2x-x^2}=x \Leftrightarrow 2x-x^2=x^2 \Leftrightarrow 2x^2-2x=0 \Leftrightarrow$ $x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=1 \Rightarrow S_{\mathbb{R}}=\{0,1\}$.

4°/a) φ est continue et strictement croissante sur $[0,1]$ donc φ réalise une bijection de $[0,1]$ sur $\varphi([0,1])=[0,1]$.

b) $\varphi^{-1} : [0,1] \to [0,1]$

$$x \mapsto \varphi^{-1}(x) = y$$

$\varphi^{-1}(x)=y \Leftrightarrow \varphi(y)=x \Leftrightarrow \sqrt{2y-y^2}=x \Leftrightarrow 2y-y^2=x^2 \Leftrightarrow$

$y^2-2y+x^2=0$. On a : $\Delta' = 1-x^2$ d'où $y' = 1-\sqrt{1-x^2}$ et

$y''=1+\sqrt{1-x^2}$, or $y\in[0,1]$ donc la solution valable est
$y'=1-\sqrt{1-x^2}$ car $y''\geq 1$ donc $\forall x\in[0,1]$, $\varphi^{-1}(x)=1-\sqrt{1-x^2}$.

Solution 15 :

1°/ g est définie, continue et dérivable sur **R** et $\forall x\in\mathbf{R}$,
$g'(x)=3x^2+12$. On a $\forall x\in\mathbf{R}$, $g'(x)>0$ d'où :

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2°/ a) g est continue et strictement croissante sur **R** donc g réalise une bijection de **R** sur **R** et comme $0\in\mathbf{R}$ donc 0 admet un seul antécédent α par g ce qui prouve qu'il existe un seul réel α tel que $g(\alpha)=0$. D'autre part on a $g(0)\cdot g(1)<0$ et g est continue sur $[0,1]$ donc $0<\alpha<1$.

b) D'après le tableau des variations de g on a :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $-$	0	$+$ $\nearrow$	$+\infty$

d'où le tableau de signe de $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

3°/ a) f est définie sur **R** et f est une fonction rationnelle donc f est dérivable sur **R**.

$\forall x\in\mathbf{R}$,

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2+4)-2x(x^3+1)}{(x^2+4)^2}=\frac{x(x^3+12x-2)}{(x^2+4)^2}=\frac{x\cdot g(x)}{(x^2+4)^2}$$

b) On a $g(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha^3+12\alpha-2=0 \Rightarrow \alpha^3=2-12\alpha$ donc

$$f(\alpha)=\frac{\alpha^3+1}{\alpha^2+4}=\frac{2-12\alpha+1}{\alpha^2+4}=\frac{3-12\alpha}{\alpha^2+4}.$$

4°/ f est définie, continue et dérivable sur **R** et $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x)=\frac{x\cdot g(x)}{(x^2+4)^2}.$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $x \cdot g(x)$.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$x.g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$\frac{3-12\alpha}{\alpha^2+4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Solution 16 :

1°/ f est définie, continue et dérivable sur **R** comme étant fonction rationnelle.

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x)=\frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de x d'où le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

• f est continue sur **R** donc $f(\mathbf{R})$ est l'intervalle $[-1,1[$.

2°/ $f(x)=x \Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{x^2+1}=x \Leftrightarrow x^2-1=x^3+x \Leftrightarrow x^3-x^2+x+1=0$

Conclusion : (E) est équivalente à $g(x)=0$ où $g(x)=x^3-x^2+x+1$.

3°/ g est continue et dérivable sur **R** comme étant fonction polynôme, $g'(x)=3x^2-2x+1$.

$3x^2-2x+1=0$, $\Delta=4-12=-8<0 \Rightarrow \forall x\in\mathbf{R},\ g'(x)>0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

g est continue et strictement croissante sur **R** donc g est une bijection de **R** sur $g(\mathbf{R})=\mathbf{R}$ et par suite 0 admet un seul antécédent $\alpha\in\mathbf{R}$ par g .

Conclusion : (E) admet une solution α . α est l'abscisse du point d'intersection de la courbe de f et de la droite Δ d'équation $y=x$.

4°/a) φ est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$ donc φ est une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $\varphi(\mathbf{R}_+)=[-1,1[$.

b) $\varphi^{-1}:[-1,1[\to \mathbf{R}_+$

$$x\mapsto \varphi^{-1}(x)=y$$

$$\varphi^{-1}(x)=y \Leftrightarrow \varphi(y)=x \Leftrightarrow \frac{y^2-1}{y^2+1}=x \Leftrightarrow y^2-1=xy^2+x$$

$\Rightarrow y^2(1-x)=x+1$

or $x\neq 1$ donc $y^2=\dfrac{x+1}{1-x}$

or $x\in[-1,1[$ donc $\dfrac{x+1}{1-x}>0$

$|y| = \sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$ or $y \in \mathbf{R}_+$ d'où $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$.

Conclusion : Pour tout $x \in [-1,1[$, $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$.

Solution 17 :

1°/ a) φ_α est dérivable sur $[0,\pi]$ comme composée et somme des fonctions dérivables sur $]0,\pi[$.

$\forall x \in [0,\pi]$,

$\varphi_\alpha'(x) = \alpha[-\alpha\sin(\alpha x)\sin x + \cos(\alpha x)\cos x] - \alpha\cos(\alpha x)\cos x + \sin(\alpha x)\sin x$

$= -\alpha^2\sin(\alpha x)\sin x + \sin(\alpha x)\sin x = (1-\alpha^2)\sin(\alpha x)\sin x$

Or $0<\alpha<1 \Rightarrow 1-\alpha^2>0$ et $0 \le x \le \pi \Rightarrow 0 \le \alpha x \le \pi$

$\Rightarrow \sin(\alpha x) \ge 0$ et $\sin x \ge 0$.

D'où $\forall x \in [0,\pi]$, $\varphi_\alpha'(x) \ge 0$.

x	0		π
$\varphi_\alpha'(x)$	0	$+$	0
$\varphi_\alpha(x)$	0	$\nearrow$	$\sin(\alpha\pi)$

b) D'après le tableau des variations de φ_α, 0 est un minimum absolu sur $[0,\pi]$ donc $\forall x \in [0,\pi]$, $\varphi_\alpha(x) \ge 0$ et comme $\varphi_\alpha(0)=0$ et φ_α est strictement croissante sur $[0,\pi]$ donc $\forall x \in]0,\pi]$, $\varphi_\alpha(x) > 0$.

2°/ a) • $\lim\limits_{x\to 0^+} f_\alpha(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(\alpha x)}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{\sin(\alpha x)}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \alpha$

car $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(\alpha x)}{x} = \alpha$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

• $\lim\limits_{x\to \pi^-} f_\alpha(x) = \lim\limits_{x\to \pi^-} \dfrac{\sin(\alpha x)}{\sin x} = +\infty$

car $\lim\limits_{x\to \pi^-} \sin(\alpha x) = \sin(\alpha\pi) > 0$ car $0 < \alpha\pi < \pi$ et $\lim\limits_{x\to \pi^-} \sin x = 0^+$.

b) f_α est définie, continue et dérivable sur $]0,\pi[$ et $\forall x \in]0,\pi[$,

$f_\alpha'(x) = \dfrac{\alpha\cos(\alpha x)\sin x - \cos x\sin(\alpha x)}{(\sin x)^2} = \dfrac{\varphi_\alpha(x)}{(\sin x)^2} > 0$

x	0		π
$f'_\alpha(x)$		$+$	
$f_\alpha(x)$	α	$\nearrow$	$+\infty$

c) $f_\alpha(\frac{\pi}{\alpha+1})=\dfrac{\sin(\alpha\frac{\pi}{\alpha+1})}{\sin(\frac{\pi}{\alpha+1})}=\dfrac{\sin(\frac{\alpha\pi+\pi-\pi}{\alpha+1})}{\sin(\frac{\pi}{\alpha+1})}$

$$=\dfrac{\sin(\pi-\frac{\pi}{\alpha+1})}{\sin(\frac{\pi}{\alpha+1})}=\dfrac{\sin(\frac{\pi}{\alpha+1})}{\sin(\frac{\pi}{\alpha+1})}=1.$$

3°/ f_α est continue et strictement croissante sur $]0,\pi[$ donc f_α est une bijection de $]0,\pi[$ sur $]\alpha,+\infty[$ et comme $\alpha+\frac{1-\alpha^2}{2}\in]\alpha,+\infty[$ donc il admet un seul antécédent de $]0,\pi[$ par f_α ce qui prouve que (E) admet une solution dans $]0,\pi[$.

Solution 18 :

1°/a) f est définie, continue et dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

$\forall x\in\ ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $f'(x)=1+\tan^2 x>0$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

b) $\Delta: y=f'(0)x+f(0) \Rightarrow \Delta: y=x$.

c) Etudions le signe de $f(x)-x$.

Soit $g(x)=f(x)-x$; g est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

$\forall x\in\ ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $g'(x)=f'(x)-1=\tan^2 x\geq 0$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$		$-\infty$	0	$+\infty$	

D'après le tableau des variations de g on a :

- $\forall x \in]-\frac{\pi}{2},0[\ :\ g(x)<0 \Rightarrow C_f$ est au dessous de Δ .
- $\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}[\ :\ g(x)>0 \Rightarrow C_f$ est au dessus de Δ .
- C_f rencontre Δ au point O(0, 0).

2°/ a) f est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ donc f est bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $f(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[) = \mathbf{R}$.

Soit $x \in \mathbf{R}$, $g'(x) = \dfrac{1}{f'(y)}$ où $y = g(x)$

$g'(x) = \dfrac{1}{1+\tan^2 y}$ or $y = g(x) \Leftrightarrow x = f(y) \Leftrightarrow x = \tan\ y$

$\Leftrightarrow x^2 = \tan^2 y$ et par suite $\forall x \in \mathbf{R},\ g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

c) $\begin{cases} g(1) = x \\ x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan\ x = 1 \\ x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$ donc $g(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

$\begin{cases} g(\sqrt{3}) = x \\ x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan\ x = 1 \\ x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3}$.

3°/ a) Montrons que $\forall x \in \mathbf{R}$, $g(-x) = g(x)$.

Soit $h(x) = g(-x)$; h est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$, $h'(x) = -g'(-x) = -g'(x)$.

Soit $k(x) = -g(x)$; k est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$, $k'(x) = -g'(x)$ donc $\forall x \in \mathbf{R}$, $h(x) = k(x)$.

Conclusion : $\forall x \in \mathbf{R}$, $g(-x) = -g(x)$ ce qui prouve que g est impaire.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(0) = 1$ car $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

4°/ a) Soit $h(x)=x-g(x)$ et $x\geq 0$. h est continue, dérivable sur $[0,+\infty[$,

$$h'(x)=1-g'(x)=1-\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{1+x^2}\geq 0 .$$

$$\begin{array}{c|lcr} x & 0 & & +\infty \\ \hline h'(x) & 0 & + & \\ \hline h(x) & & & \nearrow \\ & 0 & & \end{array}$$

$\forall x>0$ on a : $h(x)>0$ d'où $0<x-g(x)$.

• Soit $k(x)=x-g(x)-\dfrac{x^3}{3}$ $(x\geq 0)$

k est continue, dérivable sur $\mathbf{R}_+$

$$k'(x)=1-g'(x)-x^2=\frac{x^2}{1+x^2}-x^2=\frac{-x^4}{1+x^2}\leq 0$$

$$\begin{array}{c|lcr} x & 0 & & +\infty \\ \hline k'(x) & 0 & - & \\ \hline k(x) & 0 & & \\ & & (-) & \searrow \end{array}$$

d'où $\forall x>0$ on a : $k(x)<0$ d'où $x-g(x)<\dfrac{x^3}{3}$.

b) $\forall x>0$ on a : $0<x-g(x)<\dfrac{x^3}{3}$ d'où $-\dfrac{x}{3}<\dfrac{g(x)-x}{x^2}<0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}-\dfrac{x}{3}=0$ d'où $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)-x}{x^2}=0$

• $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(-t)+t}{t^2}$ $(t=-x)$

$$=\lim_{x\to 0^-}-\left(\frac{g(t)-t}{t^2}\right)=0$$

• $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-x}{x^2}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-x}{x^2}=0$.

5°/ Soit $\phi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$$x\mapsto\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$$

$D_\phi=\mathbf{R}$; $\forall x\in\mathbf{R}$, $-x\in\mathbf{R}$.

• $\phi(-0)=\phi(0)$

• $\forall x\neq 0,\ \phi(-x)=\dfrac{g(-x)}{-x}=\dfrac{-g(x)}{-x}=\dfrac{g(x)}{x}=\phi(x)$

donc ϕ est une fonction paire.

b) • ϕ est continue sur $\mathbf{R}^*$ comme étant le quotient de deux fonctions continues. ($g=f^{-1}$ est continue sur $\mathbf{R}$ comme étant la réciproque d'une fonction continue).

• ***Continuité de ϕ en 0*** :

$\lim\limits_{x\to 0}\phi(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=1=\phi(0)\Rightarrow \phi$ est continue en 0.

Conclusion : ϕ est continue sur $\mathbf{R}$.

c) • ϕ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ comme étant le quotient de fonctions dérivables.

• ***Dérivabilité de ϕ en 0*** :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{g(x)}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-x}{x^2}=0\,.$$

Conclusion : ϕ est dérivable sur $\mathbf{R}$.

d) On a : $\forall x\in\mathbf{R}: -\dfrac{\pi}{2}<g(x)<\dfrac{\pi}{2}$ d'où $|\phi(x)|=\left|\dfrac{g(x)}{x}\right|\leq\dfrac{\pi}{2|x|}$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi}{2|x|}=0$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}\varnothing=\lim\limits_{x\to+\infty}\varnothing=0$

Solution 19 :

1°/

a) Les fonctions x $\mapsto\sqrt{\sin 2x}$ et x $\mapsto\dfrac{1}{\sin x}$ sont dérivables sur $]\,0,\dfrac{\pi}{2}[$

donc f est dérivable sur $]0,\dfrac{\pi}{2}[$ comme produit de ces deux fonctions .

• $$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{\sqrt{\sin(2x)}}{(x-\frac{\pi}{2})\sin x}$$

$$= \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \sqrt{\frac{\sin(\pi - 2x)}{\pi - 2x}} \cdot \frac{-2\sqrt{\pi - 2x}}{(\pi - 2x)\sin x}$$

$$= \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \sqrt{\frac{\sin(\pi - 2x)}{\pi - 2x}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{\pi - 2x}} \cdot \frac{2}{\sin x} = -\infty$$

car $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \sqrt{\frac{\sin(\pi-2x)}{\pi-2x}} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{\frac{\sin X}{X}} = 1$ *et* $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{-1}{\sqrt{\pi-2x}} \cdot \frac{2}{\sin x} = -\infty$

Donc f n'est pas dérivable en $\frac{\pi}{2}$.

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, f'(x) = \frac{\frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin x}} . \sin x - \cos x \sqrt{\sin 2x}}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{\cos(2x).\sin x - \cos x \sin(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}.(\sin x)^2} = \frac{\sin(x - 2x)}{\sqrt{\sin(2x)}.(\sin x)^2} = \frac{-1}{\sqrt{\sin(2x)}.(\sin x)}$$

(on rappelle que sin a cos b – cos b sin a = sin(a-b))

Or sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x > 0 \Rightarrow \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}] , f'(x) < 0$

x	0 $\qquad\qquad$ $\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow 0$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{\sin 2x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{\frac{\sin 2x}{2x}}}{\frac{\sin x}{x}} . \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} = +\infty$$

2°/ f est continue et strictement décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ donc f est une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}]$ sur $(]0, \frac{\pi}{2}]) = [\,0\,,+\infty\,[= J$

3°/

a) • g est continue sur $[\,0\,,+\infty\,[$ comme réciproque d'une fonction continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

- f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\ , f\,'(x) \neq 0$ donc

  g est dérivable sur $f\ (]0, \frac{\pi}{2}[\,) =]\,0\,,+\infty\,[$.

- Etudions la dérivabilité de g à droite en 0 .

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{y\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{y-\frac{\pi}{2}}{f(y)} = \lim_{y\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\dfrac{f(y)-f(\frac{\pi}{2})}{y-\frac{\pi}{2}}} = 0$$

car on a : montré précédemment que $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}} = -\infty$

donc g est dérivable en 0 et $g_d'(0) = 0$

Conclusion : g est dérivable sur $[\,0\,,+\infty\,[$.

b) Soit $x \in]\,0\,,+\infty\,[\ ,\ g\,'(x) = \dfrac{1}{f\,'(y)}$ où $y = g(x)$

$g\,'(x) = -\sin y\,\sqrt{\sin(2y)}$

Or $y = g(x)$

$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{\sin 2y}}{\sin y} \Leftrightarrow \sqrt{\sin 2y} = x \sin y$ donc

$g\,'(x) = -x\sin^2 y$

On a : $x^2 = \dfrac{\sin 2y}{\sin^2 y} \Rightarrow x^2 = \dfrac{2\cos y}{\sin y}$

$$\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}=\frac{\sin^2 y}{1-\sin^2 y}=\frac{4}{x^4}\Rightarrow 4-4\sin^2 y\Rightarrow \sin^2 y=\frac{4}{4+x^4}$$

$$d'où\ g'(x)=\frac{-4x}{4+x^4}$$

4°/

a) On a : g est dérivable sur $[\,0\,,+\infty\,[$,

$x\mapsto\sqrt{2x}$ et $x\mapsto\sqrt{\frac{2}{x}}$ sont

dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée et somme des fonctions dérivables

b) $\forall x\in\,]\,0\,,+\infty\,[$,

$$\varphi'(x)=(\sqrt{2x})'.g'(\sqrt{2x})+\left(\sqrt{\frac{2}{x}}\right)'.g'(\sqrt{\frac{2}{x}})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2x}}.\frac{-4\sqrt{2x}}{4+4x^2}-\frac{1}{x^2\sqrt{\frac{2}{x}}}.\frac{-4\sqrt{\frac{2}{x}}}{\frac{4}{x^2}+4}=\frac{-1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}=0$$

D'où $\forall x\in\,]\,0\,,+\infty\,[$, $\varphi'(x)=0$; $\varphi(1)=2g(\sqrt{2})$

Cherchons le réel $x\in\,]0,\frac{\pi}{2}]$ tel que $g(\sqrt{2})=x$:

$g(\sqrt{2})=$

$$x\Leftrightarrow\sqrt{2}=f(x)\Leftrightarrow\sqrt{2}=\frac{\sqrt{\sin 2x}}{\sin x}\Leftrightarrow\frac{\sin^2 x}{\sin 2x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\sin^2 x}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\tan x=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}\ \text{d'où}\ \varphi(1)=\frac{\pi}{2}$$

c) On a : $\forall x\in\,]\,0\,,+\infty\,[$, $\varphi'(x)=0$ donc φ est une constante

$$\Rightarrow\ \forall x\in\,]\,0\,,+\infty\,[\,,\ \varphi(x)=\varphi(1)=\frac{\pi}{2}.$$

Solution 20 :

1°/

a) φ_n est définie et continue sur $[\,0, \frac{\pi}{2}[$ et dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et

$$\forall x \in\ ]0, \frac{\pi}{2}[\ ,\ \varphi_n'(x) = \frac{1}{n}(\tan x)^{\frac{1}{n}-1}.(1+\tan^2 x) = \frac{1+\tan^2 x}{n}.(\tan x)^{\frac{1-n}{n}}$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$\varphi_n'(x)$	‖	$+$	
$\varphi_n(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b) φ_n est continue et strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ donc φ_n est une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $\varphi_n([0, \frac{\pi}{2}[\,) = [\,0, +\infty[\, = J$. Soit $\psi_n = \varphi_n^{-1}$

c)

- φ_n est dérivable sur $]\,0, \frac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\ ,\ \varphi_n'(x) \neq 0$ donc

ψ_n est dérivable sur $\varphi_n\ (]0, \frac{\pi}{2}[) =]\,0, +\infty[$.

- Etudions la dérivabilité de ψ_n à droite en 0 :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\psi_n(x)-\psi_n(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\psi_n(x)}{x} = \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{\varphi_n(y)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{\sqrt[n]{\tan y}}$$

$$=$$

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{y}{\tan y}.\frac{\tan y}{\sqrt[n]{\tan y}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{\frac{\tan y}{y}}.(\tan y)^{1-\frac{1}{n}} = 0$$

Car $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\tan y}{y} = 1$ et $\lim\limits_{y\to 0} (\tan y)^{1-\frac{1}{n}} = 0$

Donc ψ_n est dérivable à droite en 0 et par suite ψ_n est dérivable sur $[0,+\infty[=E'$.

d) Soit $x \in E'=[0,+\infty[$; $\psi_n'(x)=\dfrac{1}{\varphi_n'(y)}$ où $y=\psi_n(x)$

$\psi_n'(x)=\dfrac{n}{(1+\tan^2 y)(\tan y)^{\frac{1}{n}-1}}$. Or $y=\psi_n(x) \Leftrightarrow x=\varphi_n(y)$

$\Leftrightarrow x=\sqrt[n]{\tan y} \Leftrightarrow x^n=\tan y$ d'où $\psi_n'(x)=\dfrac{n}{(1+x^{2n})(x^n)^{\frac{1-n}{n}}}=\dfrac{nx^{n-1}}{1+x^{2n}}$

Conclusion : $\forall x \in [0,+\infty[$, $y=\psi_n'(x)\ \dfrac{n\,x^{n-1}}{1+x^{2n}}$.

2°/ a)• $x \mapsto 1+\tan^2 x$ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

et en particulier sur $]0,\frac{\pi}{2}[$

• $x \mapsto -2\sqrt{\tan x}$ est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$

donc N est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$

• $\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}[$, $N'(x)=2\tan x\,(1+\tan^2 x)-\dfrac{1+\tan^2 x}{\sqrt{\tan x}}$

$$=(1+\tan^2 x)\left(2\tan x-\frac{1}{\sqrt{\tan x}}\right)$$

$N'(x)=0 \Leftrightarrow 2\tan x=\dfrac{1}{\sqrt{\tan x}} \Leftrightarrow (\tan x)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow (\tan x)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{2}$

Or la fonction $g :]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to]0,+\infty[$, $x \mapsto \tan x$ est une bijection .

En effet , $g'(x)=1+\tan^2 x>0 \Rightarrow g$ est continue et strictement

croissante sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et par suite le réel $(\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}$ admet un seul

antécédent $x_0 \in]0,\frac{\pi}{2}[$ par g .

Il en résulte alors que l'équation $N'(x) = 0$, ($x_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$) admet une unique solution x_0 .

- On a : $N'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \tan x_0 = (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}$

$$\Rightarrow N(x_0) = 1 + \left[(\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}\right]^2 - 2\sqrt{(\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}}$$

$$= 1 + (\frac{1}{2})^{\frac{4}{3}} - 2(\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}} = 1 + (\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}(\frac{1}{2} - 2) = 1 - \frac{3}{2\sqrt[3]{2}}$$

b) D'après la question précédente , $N'(x) = 0$ admet une seule solution x_0 dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ et comme N' est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $N'(x)$ garde un signe constant sur chacun des intervalles $]0, x_0[$ et $]x_0, \frac{\pi}{2}[$ d'où :

x	0	α	x_0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$N'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$N(x)$	1	0	$N(x_0)$	0	$+\infty$

Soit N_1 la restriction de N sur $[0, x_0]$ et N_2 la restriction de N sur $[x_0, \frac{\pi}{2}[$.

N_1 est une bijection de $]0, x_0[$ sur $[N(x_0), 1]$

Or $N(x_0) = 1 - \frac{3}{2\sqrt[3]{3}} < 0$. Donc 0 admet un seul antécédent $\alpha \in]0, x_0[$ par N_1 . N_2 est une bijection de $[x_0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[N(x_0), +\infty[$ donc 0 admet un seul antécédent $\beta \in \left]x_0, \frac{\pi}{2}\right[$ par N_2 .

Il en résulte que l'équation

$\begin{cases} N(x)=0 \\ x \in [0,\frac{\pi}{2}[\end{cases}$ admet deux solutions dont l'une est $\frac{\pi}{4}$ car $N(\frac{\pi}{4})=0$

c) • f est définie , continue sur $[0,\frac{\pi}{2}[$.

• f est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et non dérivable en 0 , la courbe de f présente donc une demi tangente verticale au point O(0,0) et $\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}[$.

$$f'(x)=\frac{1+\tan^2 x}{2\sqrt{\tan x}}-1=\frac{1+\tan^2 x-2\sqrt{\tan x}}{2\sqrt{\tan x}}=\frac{N(x)}{2\sqrt{\tan x}}$$

D'après l'étude faite en b) , il en résulte que :

$\forall x \in [0,\alpha] \bigcup [\frac{\pi}{4},+\infty[$, $N(x)\geq 0$ et $\forall x \in]\alpha,\frac{\pi}{4}[$, $N(x)<0$

x	0		α		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↗	$f(\alpha)$	↘	$1-\frac{\pi}{4}$	↗	$+\infty$

• $f(\frac{\pi}{4})=1-\frac{\pi}{4}>0$ d'où , d'après le tableau des variations de f , on a :

$$\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}[\ , f(x)\geq 0 .$$

Solution 21 :

$$1°/ \lim_{0^+} f = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+1-1}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} = 0$$

$$\lim_{0^-} f = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}} = 0$$

On a : $\lim_{0^+} f = \lim_{0^-} f = f(0)$

D'où f est continue en 0

2°/ $$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2+1-1}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-1} = \frac{1}{2} = f_d'(0)$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}$$

f est dérivable à gauche en 0

Conclusion : f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$

3°/

a) La tangente à Cf au point d'abscisse 0 et pour équation

$$y = f'(0)\,(x - 0) + f(0)$$

$y = \frac{1}{2}x$ d'où D : $y = \frac{1}{2}$ x est la tangente à Cf au point 0

b) pour $x > 0$

$$d(x) = f(x) - y = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} - \frac{x}{2} = \frac{2\sqrt{x^2+1}-\left(2+x^2\right)}{2x}$$

$$= \frac{4\left(x^2+1\right)-\left(2+x^2\right)^2}{2x\left(2\sqrt{x^2+1}+2+x^2\right)}$$

$$d(x) = \frac{-x^3}{2\left(2\sqrt{x^2+1}+2+x^2\right)} < 0$$

Cf est en dessous de D sur $]\,0\,,+\infty\,[$

Pour x ≤ 0 : $d(x) = f(x) - y = \dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}} - \dfrac{x}{2} = \dfrac{-x\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{x^2+1}}$

$$= \frac{x\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}{2\sqrt{x^2+1}\,(1+)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{-x^3}{2\sqrt{x^2+1}\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)} \geq 0$$

Cf est au dessus de D sur $]-\infty, 0]$.

4°/ pour x > 0 :

$$f'(x) = \frac{\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} - \left(\sqrt{x^2+1}-1\right)}{x^2} = \frac{x^2 - \left(x^2+1-\sqrt{x^2+1}\right)}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$

Pour x < 0 : $f'(x) = \dfrac{2\sqrt{x^2+1} - 2x\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{4\left(x^2+1\right)} = \dfrac{1}{2\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$

On a pour tout x $\in \mathbb{R}$: $f'(x) > 0$

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\frac{1}{2} \nearrow 1$

$$\lim_{x\to-\infty} f = \lim_{x\to-\infty} f \frac{x}{2\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to-\infty} f = \frac{x}{2|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} f = \frac{1}{-2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f = \lim_{x \to +\infty} f \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-1}{x} \qquad = \lim_{x \to +\infty} f = \frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}} - \frac{1}{x}$$

$= 1$

b) On a : $\begin{cases} f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \\ f \text{ ets strictement croissante sur } \mathbb{R} \end{cases}$

D'où : f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur

$$J = f(\mathbb{R}) =]\lim_{x \to +\infty} f, \lim_{x \to -\infty}[=]-\frac{1}{2}, 1[$$

Solution 22:

A.

1°/ h est définie, continue et dérivable sur **R** et $\forall x \in \mathbf{R}$,

$h'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2 \geq 0$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

2°/a) h est continue et strictement croissante sur **R** donc h réalise une bijection de **R** sur **R** et comme $0 \in \mathbf{R}$ donc 0 admet un seul antécédent $\alpha \in \mathbf{R}$ par $h \Rightarrow h(\alpha) = 0$.

b) On a : $\begin{cases} h(0{,}6) \cdot h(0{,}5) < 0 \quad et \\ h \text{ est continue sur } [-0{,}6; -0{,}5] \end{cases} \Rightarrow -0{,}6 < \alpha < -0{,}5$.

3°/ D'après le tableau de variations de h on a :

x		α		
$h(x)$	$\ominus$		$\oplus$	$+\infty$
	$-\infty$	$\nearrow$		

Conclusion :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	

B.

1°/ f étant une fonction rationnelle donc f est dérivable sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\forall x \neq 1 \text{ , } f'(x) = \frac{(3x^2-3)(x-1)^2 - 2(x^3-3x)(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{3(x^2-1)(x-1) - 2(x^3-3x)}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{3x^3 - 3x^2 - 3x + 3 - 2x^3 + 6x}{(x-1)^3}$$

d'où : $\forall x \neq 1, f'(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x + 3}{(x-1)^3} = \dfrac{h(x)}{(x-1)^3}$

2°/

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$(x-1)^3$		$-$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$	

d'où :

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty \parallel -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3°/ $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^2-3}{(x-1)^2}$ d'où $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

$f(x) - x = \dfrac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2}$ d'où $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - x = 2$

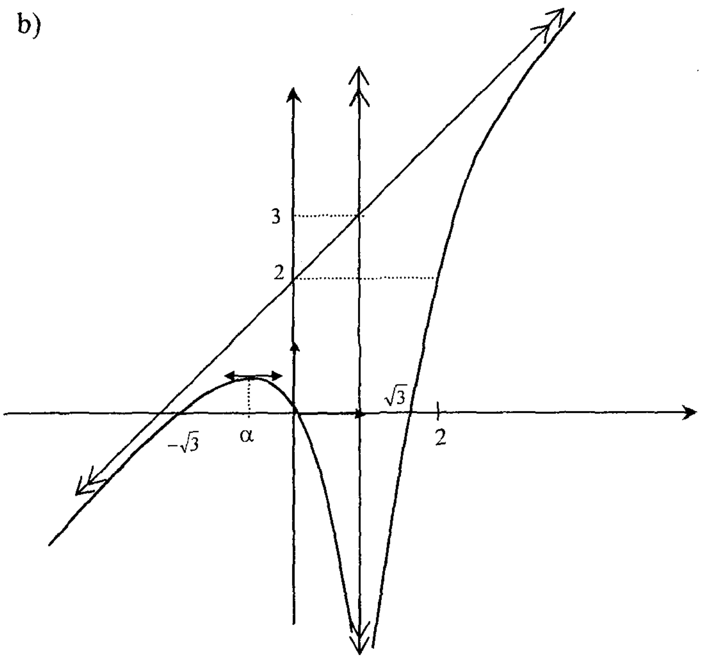
D'où la droite Δ d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $\pm\infty$.

4°/a)

$$f(x) - y = \frac{x^3 - 3x}{(x-1)^2} - (x+2) = \frac{x^3 - 3x - (x+2)(x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

On a : $\forall x \neq 1,\ f(x) - y < 0$ d'où C_f est au dessous de Δ.

b)



$$f(\alpha) \approx f(-0{,}55) = \frac{(-0{,}55)^3 + 3(0{,}55)}{(-0{,}55-1)^2} \approx 0{,}6$$

($f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$)

Solution 23 :

A)

1°/ On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin x \leq 1$ d'où $2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1$

2°/

- Soit $M(x, y) \in C \cap D_1$. On a : $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

$f(x) = 2x - 1 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

D'où : $y = \pi - 1 + 4k\pi$

$C \cap D_1 = \{ A_k(\frac{\pi}{2} + 2k\pi , \pi - 1 + 4k\pi), k \in \mathbb{Z} \}$

• Soit $M(x, y) \in C \cap D_2$. On a : $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 2x + 1 \end{cases}$

$f(x) = 2x + 1 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$C \cap D_2 = \{ B_k(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi , 3\pi + 1 + 4k\pi), k \in \mathbb{Z} \}$

• Equation de la tangente à C au point A_k.

$y = f'(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)(x - \frac{\pi}{2} - 2k\pi) + f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$

or $f'(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 2 - \cos(\frac{\pi}{2} - 2k\pi) = 2$

d'où : $y = 2(x - \frac{\pi}{2} - 2k\pi) + \pi - 1 + 4k\pi \Rightarrow y = 2x - 1$

d'où : $D_1 : y = 2x - 1$ est l'équation de la tangente à (C) au point A_k.

• Equation de la tangente à (C) au point B_k :

$y = f'(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi)(x - \frac{3\pi}{2} - 2k\pi) + f(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$

or $f'(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = 2 - \cos(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = 2$

$y = 2(x - \frac{3\pi}{2} - 2k\pi) + 3\pi - 1 + 4k\pi \Rightarrow y = 2x - 1$

d'où $D_2 : y = 2x + 1$ est l'équation de la tangente à (C) au point B_k

3°/a)On a : $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R} : f(-x) = -2x \sin x = -(2x - \sin x)$
$= -f(x)$

D'où f est une fonction impaire .

b) Le point O est un centre de symétrie de (C) .

4°/

a) $f(x + 2\pi) = 2x + 4\pi - \sin(x + 2\pi) = 2x - \sin x + 4\pi$
$= f(x) + 4$

b) Soit $T_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u} = 2k\pi\,\vec{i} + 4k\pi\,\vec{j}$.

Soit C_1 la courbe représentative de f sur $[-\pi, \pi]$.

Soit $C_2 = T_{\vec{u}}(C_1)$

Soit $M(x,y) \in C_2 \Leftrightarrow M = T_{\vec{u}}(N)$ où $N \in C_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{NM} = \vec{u}$

On a : $\begin{cases} x - x_N = 2k\pi \\ y - f(x_N) = 4k\pi \end{cases}$ où $-\pi \leq x_N \leq \pi$

On a : $y = f(x_N) + 4\pi = f(x - 2k\pi) + 4k\pi = f(x)$

$-\pi \leq x_N \leq \pi \Leftrightarrow -\pi + 2k\pi \leq \pi + 2k\pi$

$\Leftrightarrow -\pi + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$ d'où C_2 est la courbe représentative de f sur l'intervalle

$[-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$ ($k \in \mathbb{Z}$).

5°/ Etudions les variations de f sur $[0, \pi]$

$\forall x \in [0, \pi]$, $f'(x) = 2 - \cos x > 0$

x	0		π
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2π

L'équation de la tangente à (C) au point O(0,0) est $y = x$

B)

1°/ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2 - \cos x > 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 2x + 1 = -\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f = -\infty$ (d'après A) 1°/)

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2x + 1 = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f = +\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

f est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f est uen bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Conclusion : f admet une application réciproque $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2°/ On a : $f(0) = 0$ d'où $f^{-1}(0) = 0 \Rightarrow g(0) = 0$

$f(\pi) = 2\pi$ d'où $g(2\pi) = \pi$, $f(2k\pi) = 4k\pi$ d'où $g(4k\pi) = 2k\pi$

3°/ On a : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \neq 0$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$g'(0) = \frac{1}{f'(g(0))} = \frac{1}{f'(0)} = 1,\ g'(2\pi) = \frac{1}{f'(g(2\pi))} = \frac{1}{f'(\pi)} = \frac{1}{3}.$$

4°/ f étant une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ donc le réel m admet un seul antécédent par f, noté x_m.

D'où l'équation $2x - \sin x = m$ admet une seule solution x_m.

C)

1°/

a) $f(x) = 4 \Leftrightarrow 2x - \sin x = 4 \Leftrightarrow 2x = \sin x + 4$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(4 + \sin x) = x \Leftrightarrow \varnothing(x) = x$$

b) $|\varnothing'(x)| = \left|\frac{1}{2}\cos x\right| = \frac{1}{2}|\cos x| \leq \frac{1}{2}$

2°/ $\varnothing$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\varnothing'(x)| \leq \frac{1}{2}$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$ on a : $|\varnothing(x) - \varnothing(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$

On pose $x = U_n$ et $y = \alpha$

$\varnothing(x) = \varnothing(U_n) = U_{n+1}$, $\varnothing(y) = \varnothing(\alpha) = \alpha$ car $f(\alpha) = 4$

D'où $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$

b) On a : $|U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_0 - \alpha|$

$$|U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_1 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 |U_0 - \alpha|$$

$$|U_3 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_2 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 |U_0 - \alpha|$$

$$|U_3 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_2 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 |U_0 - \alpha|$$

Donc on constate que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$

Vérifions ce résultat par récurrence :

- Pour n = 0 , $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |U_0 - \alpha|$ est vraie .

- Supposons que pour un entier donné n on a :

$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$ et montrons que

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |U_0 - \alpha|$$

On a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$ (d'après 2°/ a))

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha| \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$$

$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha| = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$

D'où $\lim_{x \to +\infty} |U_n - \alpha| = 0$ et par suite $\lim_{x \to +\infty} U_n = \alpha$

Conclusion : (U_n) est une suite convergente vers α .

PRIMITIVES

résultats à retenir :

- Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I . on dit que F est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I et $F'(x) = f(x)$, pour tout x de I .
- Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I .
- Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Si F et G sont deux primitives de f sur I , alors la fonction F – G est constante sur I .
- Soit f une fonction continue sur un intervalle I .Soit x_0 un réel de I et y_0 un réel . Alors il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.
- *Primitives des fonctions usuelles et opérations:*
  Dans le tableau ci-dessous F désigne une primitive de la fonction f sur l'intervalle I et a, c, ω et φ des réels .

f	I	F
$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto ax + c$
$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$	$]0,+\infty[$ (ou $]-\infty,0[$)	$x \mapsto \dfrac{x^{-n+1}}{-n+1} + c$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0, +\infty[$	$x \mapsto \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + c$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$
$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin x + c$
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos x + c$
$x \mapsto \cos(\omega x + \varphi)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{1}{\omega}\sin(\omega x + \varphi) + c$

$x \mapsto \sin(\omega x + \varphi)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{\omega}\cos(\omega x + \varphi) + c$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x$	$]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$	$x \mapsto \tan x + c$

- Soit F et G deux primitives respectives de deux fonctions f et g sur un intervalle I.
  - La fonction F + G est une primitive sur I de $f + g$.
  - Soit λ un réel . La fonction λ F est une primitive sur I de λf .

f	Condition	F
$u'n^{n}$, n entier naturel non nul		$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$u'v+v'u$		$u.v$
$\dfrac{u'}{u^{n}}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$	u ne s'annule pas sur I	$\dfrac{u^{-n+1}}{-n+1}$
$\dfrac{u'v - v'u}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I	$\dfrac{u}{v}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	u strictement positive sur I	$2\sqrt{u}$
$u'\sqrt{u}$	u positive sur I	$\dfrac{2}{3}u\sqrt{u}$
$u'\sqrt[n]{u^{1-n}}$, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	u strictement positive sur I	$n\sqrt[n]{u}$
$u'(w' \circ u)$	w une fonction dérivable sur u(I)	$w \circ u$

EXERCICES

Exercice 1 :

Soit $f(x) = x^2 - \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

1°/ Montrer que f admet sur $]-1\ ,+\infty[$ une primitive F .

2°/ Calculer F(x) tel que F(0) = 0

Exercice 2:

$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$ où $x \geq 0$

1°/ Montrer que f admet sur $\mathbb{R}^+$ une primitive F .

2°/ Calculer F(x) tel que F(0) = 1

Exercice 3:

$f(x) = \tan^2 x + 2x$ où $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

1°/ Montrer que f admet sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ une primitive de F

2°/ Calculer F(x) tel que F(0) = 2

Exercice 4:

$f(x) = \sin x \cos^{2n} x$

1°/ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

2°/ Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ tel que F(0) = 0

Exercice 5 :

$$f(x)=\frac{2x^4-3x^2+5}{x^2} \quad \text{où } x\in]0,+\infty[$$

1°/ Montrer que f possède une primitive F sur $]0,+\infty[$

2°/ Calculer F(x) tel que $F(1)=\frac{2}{3}$

Exercice 6 :

$$f(x)=\frac{3x-4}{(3x+2)^3}$$

1°/ Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x\geq 0$ on a :

$$f(x)=\frac{a}{(3x+2)^2}+\frac{b}{(3x+2)^3}$$

2°/ Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}^+$ tels que $F(0)=0$

Exercice 7 :

$$f(x)=2\sin x+6\sin^3 x$$

On pose $F(x)=a\cos x+b\cos^3 x$

Trouver a et b tels que F soit une primitive de f

exercice 8 :

$$f(x)=\frac{x^3-3x^2+5}{(x-2)^2}$$

1°/Trouver les réels a ,b ,c tels que $\forall x>2$ on a :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{(x-2)^2}$$

2°/ En déduire toute les primitives de f définie sur $]2,+\infty[$

Exercice 9 :

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

1°/ Justifier l'existence et l'unicité d'une primitive F définie sur $\mathbb{R}$ tel que $F(0) = 0$

2°/ Montrer que F est une fonction impaire .

3°/ Soit $G(x) = F(\tan x)$ où $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

a) Montrer que G est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Calculer $G'(x)$

b) En déduire $G(x)$

c)Calculer $F(1)$

4°/ Montrer que $\forall x > 0$ on a : $F(x) + F(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$

Exercice 10 :

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

1°/ Déterminer Df ?

2°/ Prouver l'existence et l'unicité d'une primitive F définie sur $[-1, 1]$, tel que $F(0) = 0$

3°/ Soit $\varphi(x) = F(\sin x)$ où $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

a) Montrer que φ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Calculer $\varphi'(x)$

b) En déduire $\varphi(x)$

Exercice 11 :

Soit la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+7}{(x-2)^2}$.

1°/ Déterminer 3 réels a, b et c tels que : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x-2)^2}$

2°/ En déduire la primitive de f qui s'annule en 3.

Exercice 12 :

Soit la fonction f définie sur **R** par $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}$.

1°/ Montrer que f admet au moins une primitive sur **R**.

2°/ Déterminer la primitive de f qui s'annule en 0.

Exercice 13 :

Soit $f(x)=\cos(3x)\sin^3 x$.

1°/ Linéariser $f(x)$.

2°/ Déterminer la primitive F de f qui s'annule en 0.

SOLUTIONS

Solution 1 :

1°/ f est continue sur $]-1, +\infty[$

d'où f admet sur $]-1, +\infty[$ une primitive F

2°/ $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2\sqrt{x+1} + c$

$$or \begin{cases} F(0) = 0 \\ F(0) = -2 + c \end{cases} \quad \text{d'où} \quad c = 2$$

Conclusion : $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2\sqrt{x+1} + 2$

Solution 2 :

1°/ f est continue sur $\mathbb{R}^+$ comme étant le quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$

D'où f admet sur $\mathbb{R}^+$, une primitive F

2°/ $f(x) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + c$$

$$\text{Or} \begin{cases} F(0) = 1 \\ F(0) = \dfrac{2}{3} + c \end{cases} \quad \text{d'où} \quad c = \frac{1}{3}$$

Conclusion : $F(x) = \dfrac{2}{3} . \sqrt{x^3+1} + \dfrac{1}{3}$

Solution 3 :

1°/ $f(x) = \tan^2 x + 2x$

f est continue sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc f possède une primitive F sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

2°/ F(x) = ?

$f(x) = \left(1+\tan^2 x\right)+\left(2x-1\right)$

D'où $F(x) = \tan x + x^2 - x + \lambda$

Or $F(0) = \lambda = 2$ d'où

Pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $F(x) = \tan x + x^2 - x + 2$

Solution 4 :

1°/ f est le produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ alors f est continue sur $\mathbb{R}$

2°/ $F(x) = \dfrac{-\cos^{2n+1} x}{2n+1} + c$

Or $\begin{cases} F(0) = \dfrac{-1}{2n+1} + c \\ F(0) = 0 \end{cases}$ d'où $c = \dfrac{1}{2n+1}$

Conclusion : $F(x) = \dfrac{1-\cos^{2n+1} x}{2n+1}$

Solution 5 :

1°/ f est continue sur $]0, +\infty[$

D'où f possède au moins une primitive F définie sur $]0, +\infty[$

2°/ $f(x) = 2x^2 - 3 + \dfrac{5}{x^2}$

D'où $F(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - 3x - \dfrac{5}{x} + c$

Or $F(x) = \dfrac{2}{3} - 3 - 5 + c = \dfrac{2}{3} - 8 + c$

$F(1) = \dfrac{-22+3c}{3}$

Or $F(1) = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{-22+3c}{3} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 3\text{ c} = 24$ d'où $c = 8$

Conclusion : $F(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - 3x - \dfrac{5}{x} + 8$

Solution 6 :

1°/ $f(x) = \dfrac{a(3x+2)+b}{(3x+2)^3} \qquad = \dfrac{3ax+2a+b}{(3x+2)^3}$

D'où $\begin{cases} 3a = 3 \\ 2a+b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \end{cases}$

Conclusion : $f(x) = \dfrac{1}{(3x+2)^2} - \dfrac{6}{(3x+2)^3}$

2°/ $f(x) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{(3x+2)^2} - 2 \times \dfrac{3}{(3x+2)^3}$

Or on sait que si $g = \dfrac{u'}{u^n}$ alors $G = \dfrac{u^{-n+1}}{-n+1}$

D'où $F(x) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{-1}{(3x+2)} + \dfrac{1}{(3x+2)^2} + c$

On a : $F(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{4} + c = 0 \qquad c = \dfrac{1}{12}$

d'où $F(x) = \dfrac{-1}{3(3x+2)} + \dfrac{1}{(3x+2)^2} + \dfrac{1}{12}$

Solution 7 :

$F'(x) = -a \sin x + 3\, b \cos^2 x\,(-\sin x)$

$= -a \sin x - 3b \sin x\,(1 - \sin^2 x)$

$= -(a + 3b) \sin x + 3b \sin^3 x$

F étant primitive de f sur $\mathbb{R}$ si $F' = f$ $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 3b = 6 \\ -a - 3b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = -8 \end{cases}$$

D'où $F(x) = -8 \cos x + 2 \cos^3 x$

Solution 8 :

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 5}{(x-2)^2}$$

1°/ $f(x) = \dfrac{(ax+b)(x-2)^2 + c}{(x-2)^2} = \dfrac{(ax+b)(x^2-4x+4)+c}{(x-2)^2}$

$$f(x) = \frac{ax^3 - 4ax^2 + 4ax + bx^2 - 4bx + 4b + c}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{ax^3 + (b-4a)x^2 + x(4a-4b) + 4b + c}{(x-2)^2}$$

Par identification :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 4a = -3 \\ 4a - 4b = 0 \\ 4b + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 5 - 4 = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{(x-2)^2}$$

2°/ $F(x)=\dfrac{x^{2}}{2}+x-\dfrac{1}{(x-2)}+c \qquad c\in IR$

Solution 9 :

1°/ f est continue sur $\mathbb{R}$ donc f possède au moins une primitive F définie sur $\mathbb{R}$.

Comme F(0) = 0 alors F est unique .

2°/ Soit $\varphi(x)=F(-x)+F(x)$

φ est définie , dérivable sur $\mathbb{R}$

$\varphi'(x)=-F'(-x)+F'(x) \qquad =\dfrac{-1}{x^{2}+1}+\dfrac{1}{x^{2}+1}=0$

D'où $\varphi(x)=c$

Or $\varphi(0)=F(0)+F(0)=0$ d'où c = 0

D'où pour tout x $\in\mathbb{R}$: $\varphi(x)=0$

Et par suite F(-x) = -F(x)

Conclusion : F est une fonction impaire .

3°/

a) G(x) = F (tan x) où $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

On a : $G=F_0\tan$

tg est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

et pour tout $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$: (tan x) $\in Df=\mathbb{R}$

et comme F est dérivable sur $\mathbb{R}$

alors G est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

$G'(x) = F'(\text{tg } x) \cdot (1+\tan^2 x) = f(\tan x)(1+\tan^2 x)$

$$= \frac{1}{\tan^2 x+1}(1+\tan^2 x) = 1$$

b) On a : $G'(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

D'où $G(x) = x + c$

Or $G(0) = F(\tan(0)) = F(0) = 0$

Et puisque $G(0) = c$ alors $c = 0$

D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$: $G(x) = x$

c) On a : $\begin{cases} G(x) = x \\ G(x) = F(\tan x) \end{cases}$

D'où $F(\tan x) = x$

Pour $x = \frac{\pi}{4}$ on a : $F(\tan(\frac{\pi}{4})) = \frac{\pi}{4}$ d'où $F(1) = \frac{\pi}{4}$

4°/ $K(x) = F(x) + F(\frac{1}{x})$ où $x > 0$

K est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme étant somme et composée de fonction dérivables .

On a : $K'(x) = F'(x) - \frac{1}{x^2}F'(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}\right)$

$$= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

D'où $K(x) = b$ où b est une constante

$$\begin{cases} K(1)=b \\ K(1)=2F(1)=\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \qquad \text{d'où } b=\frac{\pi}{2}$$

Conclusion : $\forall x>0 : F(x)+F\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

Solution 10 :

1°/ $1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

$Df = [-1 , 1]$

2°/ f est continue sur $[-1 , 1]$

D'où il existe au moins une primitive F définie sur $[-1 , 1]$

Or $F(0) = 0$ alors F est unique .

3°/ a) $\varphi(x) = F(\sin x)$

$\varphi = F_0 \sin$

sin est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

$\forall x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ $\sin x \in [-1,1] = Df$ alors φ est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$$\varphi'(x) = F'(\sin x)\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}\,\cos x = \sqrt{\cos^2 x}\,\cos x = \cos^2 x$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x)+1)$$

b) $\varphi'(x) = \dfrac{1}{2}(\cos(2x)+1)$

Alors $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2}\sin(2x)+x)+c$

Or $\varphi(0) = F(0) = 0$

D'où $0+0+c=0 \Rightarrow c=0$

Conclusion : pour tout $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$: $\varphi(x) = \dfrac{1}{4}\sin 2x + \dfrac{x}{2}$

Solution 11 :

1°/ $f(x)=\dfrac{(ax+b)(x-2)^2+c}{(x-2)^2}=\dfrac{(ax+b)(x^2-4x+4)+c}{(x-2)^2}$

$=\dfrac{a\cdot x^3-4ax^2+4a\cdot x+bx^2-4bx+4b+c}{(x-2)^2}$

$=\dfrac{a\ \ x^3+x^2(b-4a)+x(4a-4b)+4b+c}{(x-2)^2}$

d'où $\begin{cases} a=1 \\ b-4a=-3 \\ 4a-4b=0 \\ 4b+c=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=3 \end{cases}$

d'où $\forall x>2$, $f(x)=x+1+\dfrac{3}{(x-2)^2}$.

2°/ f est continue sur $]2,+\infty[$ donc f admet au moins une primitive F définie sur $]2,+\infty[$:

$F(x)=\dfrac{x^2}{2}+x-\dfrac{3}{x-2}+k$.

or $F(3)=0 \Rightarrow \dfrac{9}{2}+3-3+k=0 \Rightarrow k=\dfrac{-9}{2}$.

Conclusion : $\forall x>2$, $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+x-\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{9}{2}$.

Solution 12 :

1°/ $\forall x\in\mathbf{R}$, $x^4+1>0$ d'où $D_f=\mathbf{R}$.

f est continue sur $\mathbf{R}$ donc f admet au moins une primitive F définie sur $\mathbf{R}$

2°/ $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}$ on pose $u(x)=1+x^4$, $u'(x)=4x^3$ d'où $\forall x\in\mathbf{R}$,

$$f(x)=\frac{1}{4}\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \Rightarrow \mathrm{F}(x)=\frac{1}{2}\sqrt{u(x)}+k=\frac{\sqrt{1+x^4}}{2}+k.$$

or $\mathrm{F}(0)=0 \Rightarrow k+\dfrac{1}{2}=0 \Rightarrow k=\dfrac{-1}{2}$.

Conclusion : $\forall x\in\mathbf{R}$, $\mathrm{F}(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^4}}{2}-\dfrac{1}{2}$.

Solution 13 :

1°/ $e^{ix}=\cos x+i\sin x$; $e^{-ix}=\cos x-i\sin x$.

On a : $\cos 3x=\dfrac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2}$ et $\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

d'où $f(x)=\left(\dfrac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2}\right)\left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3$

$$=\frac{(e^{i3x}+e^{-i3x})(e^{i3x}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-i3x})}{-16i}$$

$$=\frac{e^{i6x}-3e^{i4x}+3e^{i2x}-1+1-3e^{-2ix}+3e^{-i4x}-e^{-i6x}}{-16i}$$

$$=\frac{(e^{i6x}-e^{-i6x})-3(e^{i4x}-e^{-i4x})+3(e^{i2x}-e^{-i2x})}{-16i}$$

$$=\frac{2i\sin 6x-3(2i\sin 4x)+3(2i\sin 2x)}{-16i}$$

d'où : $f(x)=\dfrac{-1}{8}\sin 6x+\dfrac{3}{8}\sin 4x-\dfrac{3}{8}\sin 2x$.

2°/ $\mathrm{F}(x)=\dfrac{-1}{8}\left(\dfrac{-1}{6}\cos 6x\right)+\dfrac{3}{8}\left(\dfrac{-1}{4}\cos 4x\right)-\dfrac{3}{8}\left(\dfrac{-1}{2}\cos 2x\right)+k$

$\mathrm{F}(x)=\dfrac{1}{48}\cos 6x-\dfrac{3}{32}\cos 4x+\dfrac{3}{16}\cos 2x+k$.

Or $\mathrm{F}(0)=0 \Rightarrow \dfrac{1}{48}-\dfrac{3}{32}+\dfrac{3}{16}+k=0 \Rightarrow k=\dfrac{-11}{96}$.

Conclusion : $\forall x\in\mathbf{R}$, $\mathrm{F}(x)=\dfrac{1}{48}\cos 6x-\dfrac{3}{32}\cos 4x+\dfrac{3}{16}\cos 2x-\dfrac{11}{96}$.

INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

Des résultats à retenir :

- Le plan étant muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$, l'unité d'aire, notée par u.a est l'aire du rectangle de dimensions $\|\vec{i}\|$ et $\|\vec{j}\|$.
- Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Si F et G sont deux primitives de f sur I alors pour tous a et b de I , $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.
- Le plan est muni d'un repère orthogonal .
  Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a , b] et F une primitive de f sur [a, b] .
  L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations x = a et x = b est le réel F(b) – F(a)
  Le réel F(b) – F(a) est appelé intégrale de f de a à b et est noté $\int_a^b f(x)dx$.
- Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels de I et F une primitive de f sur I .
  On appelle intégrale de f entre a et b le réel , noté $\int_a^b f(x)dx$, défini par $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.
- Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a , b et c des réels de I . Alors :
  $$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad ; \quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$
  $$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \quad (\textit{Relation de Chasles})$$
- Le plan est muni d'un repère orthogonal .
  Soit f une fonction continue sur [a ,b].
  L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses , la courbe de f , les droites d'équations x = a et x = b est le réel $\int_a^b |f(x)|dx$.

- Soit f et g deux fonction continues sur [a ,b].
  Pour tous réels α et β ,
  $$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$$
- Soit f une fonction continue sur [a , b]. Si f est positive sur [a ,b], alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- Soit f une fonction continue sur [a , b] où a < b . Si f est positive et ne s'annule qu'en un nombre finide réels de [a , b] , alors $\int_a^b f(x)dx > 0$.
- Soit f , g et h trois fonctions continues sur [a , b].
  Si h $\leq f \leq$ g , alors $\int_a^b h(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
- Si f est une fonction continue sur [a, b] , alors
  $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$
- Le plan est muni d'un repère orthogonal.
  Soit f et g deux fonctions continues sur [a , b].
  L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f , la courbe de g et les droites d'équations x = a et x = b est le réel
  $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$.
- *Théorème d'intégration par parties :*
  Soit f et g deux fonctions dérivables sur [a , b] et telles que leurs dérivées f ' et g' sont continues sur [a ,b]. Alors
  $$\int_a^b f(t)g'(t)dt = \left[f(t)g(t)\right]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt .$$
  Soit f une fonction continue sur [a , b] (a < b). On appelle valeur moyenne de f sur [a ,b] le réel , noté $\overline{f}$, défini par
  $$\overline{f} = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx .$$
- *Interprétation géométrique de la valeur moyenne*
  Le plan est muni d'un repère orthogonal.
  Soit f une fonction continue et positive sur [a , b].

L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f , les droites d'équations , $x = a$, $x = b$ et $y = 0$ est égale à celle du rectangle de côtés (b – a) et $\overline{f}$.

- *Inégalité de la moyenne*

Soit f une fonction continue sur [a , b] (a < b) . Soit m et M deux réels .

Si pour tout x de [a , b] , $m \leq f(x) \leq M$, alors $m \leq \overline{f} \leq M$.

- Soit f une fonction continue sur [a , b] (a < b) . Il existe $c \in [a, b]$, tel que $\overline{f} = f(c)$.
- L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soit f une fonction continue et positive sur [a , b] . Le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc AB = { M (x , y) tels que $y = f(x)$ et $a \leq x \leq b$ } autour de l'axe $\left(o,\vec{i}\right)$ est le réel $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$

- Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I . Alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.
- Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I . Alors la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur I et $F'(x) = f(x)$, pour tout réel x de I .

- Soit f une fonction continue sur un intervalle I , u une fonction dérivable sur un intervalle J telle que $u(J) \subset I$ et a un réel de I. Alors la fonction F définie sur J par $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t)\,dt$ est dérivable sur J et $F'(x) = f((u(x)).u'(x)$, pour tout x de J .
- Soit f une fonction continue sur un intervalle I centré en 0 et soit a un réel de I.
  - Si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(x) = dx = 0$.
  - Si f est paire alors $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

EXERCICES

Exercice 1 :

Calculer l'intégrale $\mathcal{A}$ dans chacun des cas suivants :

1°/ $\mathcal{A} = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+2x^3}}\,dx$ 2°/ $\mathcal{A} = \int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\,dt$

3°/ $\mathcal{A} = \int_{-1}^0 \frac{2t}{(t^2+1)^3}\,dt$ 4°/ $\mathcal{A} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx$

5°/ $\mathcal{A} = \int_0^2 (1-|x-1|^3)\,dx$ 6°/ $\mathcal{A} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x \sin^4 x\,dx$

7°/ $\mathcal{A} = \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \cos^3 x\,dx$ 8°/ $\mathcal{A} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos^3 x + \sin^3 x)\,dx$

Exercice 2 :

Soit $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbf{R}$; $x \mapsto 1 + tgx$.

1°/ a) Montrer que f est une bijection.

b) Soit $g = f^{-1}$. Prouver que g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$g'(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$$

2°/ Soit l'intégrale $\mathbf{I} = \int^2 \frac{1}{x^2 - 2x + 2}\,dx$.

a) Vérifier que $\mathbf{I} = g(2) - g(1)$.

b) En déduire que $\mathbf{I} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 3 :

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $U_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\,dx$.

1°/ Montrer que (U_n) est une suite décroissante, minorée par 0.

2°/ Soit n un entier non nul.

a) Montrer que la fonction $f_n : [0, 1] \to \mathbf{R} : x \mapsto x^n \sqrt{1-x}$ admet un maximum relatif que l'on précisera.

b) En déduire que (U_n) converge vers 0.

3°/ a) Calculer U_0 .

b) Prouver que $\forall n \geq 1$, on a : $(2n+3)U_n = 2n\,U_{n-1}$.

4°/ Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$, $U_n = \dfrac{2^{2n+2}\,n!(n+1)!}{(2n+3)!}$.

Exercice 4 :

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \; dt$.

1°/ Calculer U_0, U_1, U_2.

2°/ Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que :

$$U_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} U_n$$

3°/ Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $U_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \dfrac{\pi}{2^{2n+1}}$.

4°/ a) Montrer que $(n+1)U_{n+1} \cdot U_n$ est indépendant de n.

b) Calculer alors U_{2n+1}.

Exercice 5 :

Soit a un réel de l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $I_n(a) = \int_0^a \dfrac{\sin^{2n} t}{\cos t} \, dt$.

1°/ a) Montrer que $\forall t \in [0, a]$, $0 \leq \dfrac{\sin^{2n} t}{\cos t} \leq \dfrac{\sin^{2n} a}{\cos a}$.

b) Montrer que $0 \leq I_n(a) \leq \dfrac{a \sin^{2n} a}{\cos a}$.

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(a)$.

Exercice 6 :

Soit $F(x) = \int_0^x \dfrac{dt}{\sqrt{t^4+1}}$.

1°/ Montrer que F est une fonction impaire.

2°/ Etudier le sens des variations de F.

3°/a) Prouver que $\forall t \geq 1$, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}} \leq \dfrac{1}{t^2}$.

b) En déduire que $\forall x \geq 1$, $F(x) - F(1) \leq 1$.

c) En déduire que F admet une limite finie l en $+\infty$.
On admettra que $l \approx 0{,}92$.

4°/a) Ecrire une équation de la tangente (T) à C_F au point d'abscisse $x_0 = 0$.

b) Etudier la position de C_F et (T).

c) Donner l'allure de la courbe C_F dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 7 (BAC Tunisien) :

Pour tout entier naturel non nul, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^n \, dx$.

1°/ a) Pour tout réel x de l'intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$ et pour tout entier naturel n, calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto (\operatorname{tg} x)^{n+1}$

b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}.$$

2°/ a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul, on a : $I_n \geq 0$.

En déduire que $I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

b) Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

Exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2+1}$.

1°/a) Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans **R** une solution unique α telle que : $1 < \alpha < \dfrac{3}{2}$.

2°/ On appelle g la restriction de f à $\mathbf{R}_+$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie dans $]1,2]$

b) Ecrire l'expression de $g^{-1}(x)$ pour x appartenant à $]1,2]$.

c) Tracer la courbe (C ') de g^{-1} dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3°/ Soit φ la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ par : $\varphi(x)=\int_0^{\text{tg}x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que φ est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ et que $\varphi'(x)=\text{tg}^2x+2$.

b) Calculer alors $\varphi(x)$.

c) En déduire l'aire A du domaine limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives $x=0$, $x=1$ et $y=1$.

Exercice 9 :

Soit n $\in$ IN et $U_n = \int_0^1 \mathbf{x^n.\sqrt{1-x^2}dx}$

1°/a) Montrer que pour tout n $\in$ IN : $0 \le U_n \le \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n+1}}$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

2°/Utiliser une intégration par parties pour montrer que pour tout n $\in$ IN on a : $U_{n+2}= \frac{\mathbf{n+1}}{\mathbf{n+4}} U_n$

3°/ Soit x $\in$ IR et $\Phi(t) = \int_0^{\cos t} \mathbf{\sqrt{1-x^2}dx}$

a) Montrer que Φ est dérivable sur IR.

b) Calculer $\Phi'(t)$.

c) En déduire $\Phi(t)$ pour t $\in [0,\frac{\pi}{2}]$. Calculer alors U_0.

4°/ a) Montrer que pour tout n $\in$ IN on a : $\frac{\mathbf{n+1}}{\mathbf{n+4}} \le \frac{U_{n+1}}{U_n} \le 1$

b) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n}$

c) Montrer que pour tout n $\in$ IN on a :

$$U_n.U_{n+1}= \frac{\pi}{\mathbf{2(n+1)(n+2)(n+3)}}$$

d) Montrer alors que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sqrt{n}\,U_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Exercice 10 :

$$U_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

1°/Calculer U_0 .

2°/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 0$

3°/a)Montrer que (Un) est une suite décroissante

b) Montrer que (U_n) est convergente

4°/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\frac{1}{\sqrt{2}(2n+2)} \leq U_n \leq \frac{1}{2n+2}$$

Calculer alors la limite de (U_n)

Exercice 11:

1°/ $f(x) = x + \sin x$

Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par C_f ; (x'x) ; x = 0 et $x = \frac{\pi}{2}$

2°/ a) Calculer $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$

b) C : la courbe représentative de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Calculer le volume du solide (S) obtenu par la rotation de C autour l'axe des abscisses .

Exercice 12:

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

1°/ Déterminer D_f

2°/ Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par C_f ; la droite D : y = 1 , et les droites x = 0 et $x = \frac{\pi}{4}$.

3°/ Soit $\varphi(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$

a) Calculer $\varphi'(x)$ et prouver que $\varphi'(x) = 3f^2(x) - 2f(x)$

b) Calculer le volume du solide (S) obtenu par la rotation de Γ autour de l'axe des abscisses où $\Gamma = \left\{M(x,y) / y = f(x) \text{ et } 0 \le x \le \frac{\pi}{4}\right\}$

Exercice 13 :

A) Soit la fonction $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to IR ; x \mapsto tgx$

et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°/a) Etudier les variations de f.

b) Soit Δ la tangente à C_f au point d'abscisse $x_0 = 0$. Etudier les positions relatives de C_f et Δ.

c) Tracer C_f.

2°/a) Montrer que f est une bijection.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur IR.

c) Prouver que pour tout $x \in IR$: $f^{-1}(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

3°/ Calculer alors $I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.

B) Soit $n \in IN^*$ et $a_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$ et $a_0 = 1$.

1°/ Montrer que : $a_{n+1} - a_n = - \int_0^1 t^2(1-t^2)^n dt$.

2°/ Montrer que la suite (a_n) est convergente.

3°/a) Prouver à l'aide d'une intégration par parties que pour tout $n \in IN^*$ on a : $a_{n+1} = \frac{(2n+2)a_n}{3+2n}$

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN$: $a_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

C) On considère : $U_n = \sum_{p=0}^{n}\left(\dfrac{p!}{1\times3\times5\times....\times(2p+1)}\right)$ où $n \in \mathbb{N}$.

1°/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = 2.\int_0^1 \dfrac{1-\left(\dfrac{1-t^2}{2}\right)^{n+1}}{1+t^2}$.

2°/a) On pose $V_n = 2I - U_n$. Exprimer V_n à l'aide d'une intégrale.

b) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$: $0 \leq \dfrac{(1-t^2)^{n+1}}{1+t^2} \leq 1$.

c) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

3°/ Calculer alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

SOLUTIONS

Solution 1 :

$$\mathcal{A} = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+2x^3}}\,dx = \int_0^1 x^2(1+2x^3)^{\frac{-1}{2}}\,dx = \frac{1}{6}\int_0^1 6x^2(1+2x^3)^{\frac{-1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\left[\frac{(1+2x^3)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}-1}{3}$$

2°/ $$\mathcal{A} = \int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 2t(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{-1}{3}.$$

3°/ $$\mathcal{A} = \int_{-1}^0 \frac{2t}{(t^2+1)^3}\,dt = \int_{-1}^0 2t(t^2+1)^{-3}\,dt = \left[\frac{(t^2+1)^{-2}}{-2}\right]_{-1}^0 = \frac{-3}{8}.$$

4°/ $$\mathcal{A} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx = 2\left[\sqrt{1+x}\right]_0^1 = 2(\sqrt{2}-1).$$

5°/ $$\mathcal{A} = \int_0^2 (1-|x-1|^3)\,dx = \int_0^1 (1-|x-1|^3)\,dx + \int_1^2 (1-|x-1|^3)\,dx$$

$$= \int_0^1 (1-(1-x)^3)\,dx + \int_1^2 (1-(x-1)^3)\,dx$$

$$= \left[x+\frac{(1-x)^4}{4}\right]_0^1 + \left[x-\frac{(x-1)^4}{4}\right]_1^2 = \frac{3}{4}+\frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

6°/ $$\mathcal{A} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x\sin^4 x\,dx = \left[\frac{\sin^5 x}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 = \frac{9\sqrt{3}}{160}.$$

7°/ $$\mathcal{A} = \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \cos^3 x\,dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \cos x\cos^2 x\,dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \cos x(1-\sin^2 x)\,dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^0 (\cos x - \cos x\sin^2 x)\,dx = \left[\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right]_{\frac{\pi}{3}}^0 = \frac{-3\sqrt{3}}{8}$$

$8°/\ A=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos^3 x+\sin^3 x)\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos x(1-\sin^2 x)+\sin x(1-\cos^2 x))\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos x+\sin x-\cos x\sin^2 x-\sin x\cos^2 x)\,dx$

$=\left[\sin x-\cos x-\dfrac{\sin^3 x}{3}+\dfrac{\cos^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\dfrac{27-9\sqrt{3}}{24}$

Solution 2 :

1°/a) f est définie et dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et $\forall x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ on a :

$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}>0$.

f est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ donc f réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $]\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f(x);\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)[=\mathbf{R}$.

b) * f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et $\forall x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $f'(x)\neq 0$.

donc g est dérivable sur $f(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[)=\mathbf{R}$.

* $\forall x\in\mathbf{R}$ on a : $g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$. Posons $g(x)=y$

d'où $g'(x)=\dfrac{1}{f'(y)}$. Or $f'(y)=\dfrac{1}{\cos^2 y}=1+tg^2 y$.

Or $g(x)=y \Leftrightarrow x=f(y) \Leftrightarrow x=1+tgy \Leftrightarrow tgy=x-1 \Leftrightarrow tg^2 y=x^2-2x+1$

d'où $f'(y)=x^2-2x+2$ et par suite $\forall x\in\mathbf{R}$ on a :

$g'(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+2}$.

2°/a) $\mathbf{I}=\int_1^2\dfrac{dx}{x^2-2x+2}=\int_1^2 g'(x)dx=[g(x)]_1^2=g(2)-g(1)$

b) On a : $\mathbf{I}=g(2)-g(1)$.

* Calcul de $g(2)$:

$g(2)=x \Leftrightarrow f(x)=2 \Leftrightarrow 1+tgx=2 \Leftrightarrow tgx=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$

car $x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Donc $g(2)=\frac{\pi}{4}$.

* Calcul de $g(1)$:

$g(1)=x \Leftrightarrow f(x)=1 \Leftrightarrow 1+tgx=1 \Leftrightarrow tgx=0 \Leftrightarrow x=0$

car $x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Donc $g(1)=0$ d'où $\mathbf{I}=\frac{\pi}{4}$

Solution 3 :

1°/ $x\mapsto x^n\sqrt{1-x}$ est continue sur $]-\infty,1]$ en particulier sur $[0,1]$ d'où $\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$ existe.

$$U_{n+1}-U_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}(x-1)\,dx$$

$\forall x\in[0,1]$, $x^n\sqrt{1-x}(x-1)\le 0$ d'où $\forall n\in\mathbf{N}$, $U_{n+1}-U_n\le 0$ d'où (U_n) est une suite décroissante.

On a : $\forall x\in[0,1]$, $x^n\sqrt{1-x}\ge 0$ d'où $U_n\ge 0$ d'où (U_n) est une suite minorée par 0.

2°/a) f_n est continue sur $[0,1]$; f_n est dérivable sur $[0,1[$

$$\forall x\in[0,1[,\ f_n'(x)=nx^{n-1}\sqrt{1-x}+x^n\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{2nx^{n-1}(1-x)-x^n}{2\sqrt{1-x}}$$

$$=\frac{x^{n-1}(2n-2nx-x)}{2\sqrt{1-x}}=\frac{x^{n-1}(2n-(2n+1)x)}{2\sqrt{1-x}}$$

x	0		$\frac{2n}{2n+1}$		1
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	M_n	$\searrow$	0

$$M_n=(\frac{2n}{2n+1})^n\sqrt{1-\frac{2n}{2n+1}}=\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

d'où $\forall x\in[0,1]$, on a : $0\leq f_n(x)\leq\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Conclusion : f_n admet sur $[0,1]$ un maximum relatif égal à

$$M_n=\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

b) On a : $0\leq x^n\sqrt{1-x}\leq M_n\Rightarrow 0\leq U_n\leq\int_0^1 M_n\,dx$

$$0\leq U_n\leq[M_n x]_0^1\Rightarrow 0\leq U_n\leq M_n$$

$$\lim_{n\to+\infty}M_n=\lim_{n\to+\infty}e^{n\operatorname{Log}\frac{2n}{2n+1}}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0 \text{ car :}$$

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}n\operatorname{Log}\frac{2n}{2n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}-n\operatorname{Log}\frac{2n+1}{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}-n\operatorname{Log}(1+\frac{1}{2n})$

$$=\lim_{X\to0}\frac{-1}{2}\frac{\operatorname{Log}(1+X)}{X}=\frac{-1}{2}$$

d'ou (U_n) converge vers 0.

3°/a) $U_0=\int_0^1\sqrt{1-x}\,dx=\left[\frac{-2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}$

b) $\begin{cases}u=x^n\\ v'=\sqrt{1-x}\end{cases}$ et $\begin{cases}u'=nx^{n-1}\\ v=-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\end{cases}$

$$U_n=\left[-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\cdot x^n\right]_0^1+\frac{2}{3}n\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}\,dx$$

$$=\frac{2}{3}n\int_0^1(x^{n-1}\sqrt{1-x}-x^n\sqrt{1-x})\,dx$$

$$U_n=\frac{2}{3}n(\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x}\,dx-\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx).$$

$3U_n = 2nU_{n-1} - 2nU_n \Rightarrow (3+2n)U_n = 2nU_{n-1}$.

4°/ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}$, $U_n = \dfrac{2^{2n+2} n!(n+1)!}{(2n+3)!}$

• pour $n=0$, $U_0 = \dfrac{2}{3} = \dfrac{2^{2\cdot 0+2} 0!\,(0+1)!}{(2\cdot 0+3)!}$

donc la relation demandée est vraie pour $n=0$.

• supposons que pour un entier donné n on a : $U_n = \dfrac{2^{2n+2} n!(n+1)!}{(2n+3)!}$

et montrons que $U_{n+1} = \dfrac{2^{2n+4}(n+1)!(n+2)!}{(2n+5)!}$

On a : $U_{n+1} = \dfrac{(2n+2)}{2n+5} U_n$ d'après 3°/ b)

$$U_{n+1} = \frac{(2n+2)}{2n+5} \cdot \frac{2^{2n+2} n!(n+1)!}{(2n+3)!} = \frac{2(n+1)(2n+4)2^{2n+2} n!(n+1)!}{(2n+5)!}$$

$$= \frac{2^2 (n+1)(n+2)2^{2n+2} n!(n+1)!}{(2n+5)!} = \frac{2^{2n+4}(n+1)!(n+2)!}{(2n+5)!}$$

d'où $\forall n \in \mathbf{N}$, $U_n = \dfrac{2^{2n+2} n!(n+2)!}{(2n+3)!}$.

Solution 4 :

1°/ $U_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0 t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dt = \dfrac{\pi}{2}$

$U_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

$U_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\cos 2t}{2} \, dt = \left[\dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{4}$.

2°/ $U_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} t \, dt$

Soient $\begin{cases} u' = \cos t \\ v = \cos^{n+1} t \end{cases}$ et $\begin{cases} u = \sin t \\ v' = -(n+1)\cos^n t \sin t \end{cases}$

$$U_{n+2} = \left[\sin t \cos^{n+1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \sin^2 t \, dt$$

$$U_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t(1-\cos^2 t)\, dt \Rightarrow U_{n+2} = (n+1)(U_n - U_{n+2})$$

$$\Rightarrow U_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} U_n .$$

3°/ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}$, $U_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\dfrac{\pi}{2^{2n+1}}$.

- pour $n=0$, $U_0 = \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2\cdot 0)!}{(0!)^2}\cdot\dfrac{\pi}{2^{2\cdot 0+1}}$
- supposons que pour un entier donné n on a : $U_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\dfrac{\pi}{2^{2n+1}}$ et

montrons que $U_{2n+2} = \dfrac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}\dfrac{\pi}{2^{2n+3}}$

$$U_{2n+2} = U_{(2n)+2} = \frac{2n+1}{2n+2}U_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{\pi}{2^{2n+1}}$$

$$= \frac{(2n+1)!\pi}{2^{2n+2}(n+1)(n!)^2} = \frac{(2n+2)!\pi}{2^{2n+3}((n+1)!)^2}$$

d'où $\forall n \in \mathbf{N}$, $U_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\dfrac{\pi}{2^{2n+1}}$.

4°/a) Soit $V_n = (n+1)U_{n+1}\cdot U_n$

$$V_{n+1} = (n+2)U_{n+2}\cdot U_{n+1} = (n+2)\frac{n+1}{n+2}U_n \cdot U_{n+1}$$

$$= (n+1)U_n \cdot U_{n+1} = V_n \Rightarrow (V_n) \text{ est une suite constante.}$$

$V_0 = 1\cdot U_1 \cdot U_0 = \dfrac{\pi}{2}$ d'où $\forall n \in \mathbf{N}$, $(n+1)U_n \cdot U_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

b) $(2n+1)U_{2n}\cdot U_{2n+1} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow (2n+1)\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\dfrac{\pi}{2^{2n+1}}U_{2n+1} = \dfrac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\frac{1}{2^{2n}}U_{2n+1} = 1 \Rightarrow U_{2n+1} = \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Solution 5 :

1°/a) Soit $f_n(t)=\dfrac{\sin^{2n} t}{\cos t}$; f_n est dérivable sur $[0,a]$ et $\forall t\in[0,a]$,

$$f_n'(t)=\frac{\sin^{2n-1} t(2n\cos^2 t+\sin^2 t)}{\cos^2 t}\geq 0$$

ce qui prouve que f_n est une fonction croissante sur $[0,a]$ donc pour tout $t\in[0,a]$, $f_n(0)\leq f_n(t)\leq f_n(a)$ d'où $0\leq\dfrac{\sin^{2n} t}{\cos t}\leq\dfrac{\sin^{2n} a}{\cos a}$.

b) En intégrant entre 0 et a ces inégalités on obtient :

$$0\leq\int_0^a\frac{\sin^{2n} t}{\cos t}\mathrm{d}t\leq\int_0^a\frac{\sin^{2n} a}{\cos a}\mathrm{d}t$$

or $\displaystyle\int_0^a\frac{\sin^{2n} a}{\cos a}\mathrm{d}t=\frac{\sin^{2n} a}{\cos a}[t]_0^a=a\frac{\sin^{2n} a}{\cos a}$

Il en résulte que : $0\leq \mathrm{I}_n(a)\leq a\dfrac{\sin^{2n} a}{\cos a}$.

c) On a : $\forall n\geq 1$, $0\leq \mathrm{I}_n(a)\leq a\dfrac{\sin^{2n} a}{\cos a}$ et

$$\lim_{n\to+\infty} a\frac{\sin^{2n} a}{\cos a}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a}{\cos a}\cdot(\sin^2 a)^n=0 \text{ car } -1<\sin^2 a<1$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{I}_n(a)=0$.

2°/ $\displaystyle \mathrm{U}_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(2k+1)\cdot 2^{2k+1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}$

$$=\sin\frac{\pi}{6}+\frac{\sin^3(\frac{\pi}{6})}{3}+\frac{\sin^5(\frac{\pi}{6})}{5}+\cdots+\frac{\sin^{2n-1}(\frac{\pi}{6})}{2n-1}=\mathrm{F}_n(\frac{\pi}{6})$$

or d'après 4°/ b) :

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{F}_n(\frac{\pi}{6})=g(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}\mathrm{Log}\left(\frac{1+\sin\frac{\pi}{6}}{1-\sin\frac{\pi}{6}}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Log}3=\mathrm{Log}\sqrt{3}$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{U}_n=g(\frac{\pi}{6})=\mathrm{Log}\sqrt{3}$.

Solution 6 :

1°/ F est définie sur **R** car la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}}$ est continue sur **R**.

F est impaire si et seulement si $\forall x \in \mathbf{R}$, $F(-x)+F(x)=0$

Soit $K(x)=F(-x)+F(x)$

K est dérivable sur **R** comme somme et composée des fonctions dérivables sur **R** .

$\forall x \in \mathbf{R}$, $K'(x)=-F'(-x)+F'(x)$

Or $F'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}}$ d'où $K'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{x^4+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}}=0$

Donc $\forall x \in \mathbf{R}$, $K'(x)=0$ d'où K est une fonction constante.

Or $K(0)=2F(0)=0$ donc $\forall x \in \mathbf{R}$, $K(x)=0 \Rightarrow F(-x)+F(x)=0$

ce qui prouve que F est une fonction impaire.

2°/ On a : $\forall x \in \mathbf{R}$, $F'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}}>0$

d'où F est une fonction strictement croissante sur **R** .

3°/a) On a : $\forall t \in \mathbf{R}^*$, $t^4+1 \geq t^4 \Rightarrow \sqrt{t^4+1} \geq t^2 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}} \leq \dfrac{1}{t^2}$

en particulier pour tout $t \geq 1$ on a : $\dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}} \leq \dfrac{1}{t^2}$

b) Soit $x \geq 1$, $F(x)=\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}+\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}=F(1)+\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

or pour tout $t \geq 1$, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}} \leq \dfrac{1}{t^2} \Rightarrow \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}} \leq \int_1^x \frac{1}{t^2}dt$

$\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2}dt=\left[\frac{-1}{t}\right]_1^x=\frac{-1}{x}+1$ or pour tout $x \geq 1$, $1-\dfrac{1}{x} \leq 1$

d'où $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}} \leq 1 \Rightarrow F(1)+\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}} \leq F(1)+1$

$\Rightarrow F(x) \leq F(1)+1 \Rightarrow F(x)-F(1) \leq 1$.

Conclusion : $\forall x \geq 1$, $F(x)-F(1) \leq 1$.

c) F est une fonction strictement croissante

et $\forall x \in [1,+\infty[$, $F(x) \leq F(1)+1$ (F est majorée sur $[1,+\infty[$ par $F(1)+1$)

donc F admet une limite finie l en $+\infty$.

4°/ a) La tangente (T) à C_F au point d'abscisse $x_0 = 0$ a pour équation $y = F'(0)x + F(0)$ or $F'(0) = 1$ et $F(0) = 0$ d'où (T) : $y = x$.

b) $g(x) = F(x) - x$.

g est dérivable sur $\mathbf{R}$. $\forall x \in \mathbf{R}$, $g'(x) = F'(x) - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \leq 0$

car $\forall x \in \mathbf{R}$, $\sqrt{x^4+1} \geq 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$	$(+)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$(-)$

d'après le tableau des variations de g, on a :

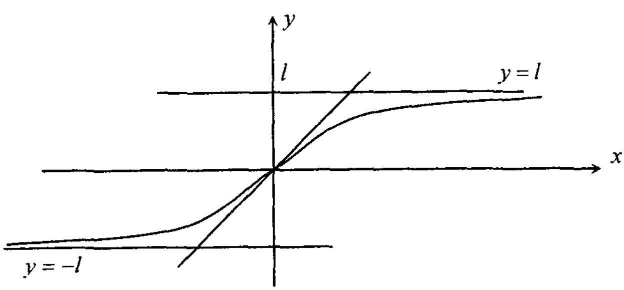
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

donc : • sur $]-\infty, 0[$, C_F est au dessus de (T)

• sur $]0, +\infty[$, C_F est au dessous de (T)

• C_F et (T) se rencontrent au point O(0,0).

c)



Solution 7 :

1°/ a) Soit $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{n+1}$.

f est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $f'(x) = (n+1)\operatorname{tg}^n x(1 + \operatorname{tg}^2 x)$.

b) $I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^n x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^{n+2} x \, dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\mathrm{tg}^n x + \mathrm{tg}^{n+2} x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^n x (1 + \mathrm{tg}^2 x) dx$$

$$= \frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (n+1) \mathrm{tg}^n x (1 + \mathrm{tg}^2 x) dx$$

$$= \frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) dx = \frac{1}{n+1} [f(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1} [f(\frac{\pi}{4}) - f(0)]$$

or $f(\frac{\pi}{4}) = 1$ et $f(0) = 0$ d'où $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.

2°/ a)• $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, on a : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathrm{tg}^n x \geq 0$ donc $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^n x \, dx \geq 0$

d'où $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $I_n \geq 0$.

• On a : $I_n - \frac{1}{n+1} = -I_{n+2}$ or $I_{n+2} \geq 0$ donc $-I_{n+2} \leq 0$

d'où $I_n - \frac{1}{n+1} \leq 0$ et par suite $I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

b) on a : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

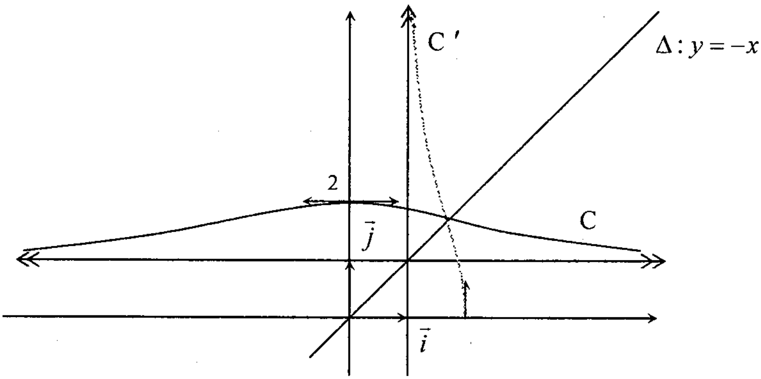
Solution 8 :

1°/ a) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2+2)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

le signe de $f'(x)$ est celui de $-x$ d'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1



b) $f(x)=x \Leftrightarrow \dfrac{x^2+2}{x^2+1}=x \Leftrightarrow x^3-x^2+x-2=0$

Soit $h(x)=x^3-x^2+x-2$, $h'(x)=3x^2-2x+1$

Or $\Delta=-8<0$ donc $h'(x)>0$ d'où

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$+$
$h(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

h est continue et strictement croissantes sur **R** donc h réalise une bijection de **R** sur **R** donc 0 admet un seul antécédent α par h et par suite l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α dans **R** .

On a : $\begin{cases} h(1)\cdot h(\frac{3}{2})<0 \\ h \text{ est continue sur } [\,1,\frac{3}{2}\,] \end{cases}$ donc $1<\alpha<\dfrac{3}{2}$.

2°/ a) g est continue et strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$ donc g réalise une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $g(\mathbf{R}_+)=\,]\,1,2\,]$ donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $]\,1,2\,]$.

b) $g^{-1}:\,]\,1,2\,] \to \mathbf{R}\ :\ x \mapsto g^{-1}(x)=y$

$g^{-1}(x)=y \Leftrightarrow g(y)=x \Leftrightarrow \dfrac{y^2+2}{y^2+1}=x \Leftrightarrow y^2+2=xy^2+x \Leftrightarrow$

$y^2(1-x)=x-2 \Leftrightarrow y^2=\dfrac{x-2}{1-x}$ (car $x\neq 1$) $\Leftrightarrow y=\sqrt{\dfrac{x-2}{1-x}}$ (car $y\in\mathbf{R}_+$)

c) $(C') = S_\Delta(C)$ où S_Δ est la symétrie orthogonale d'axe $\Delta : y = x$.

3°/ a) La fonction f est continue sur **R** donc la fonction

$F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est dérivable sur **R**.

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}[$, $\operatorname{tg} x \in [0,1] \subset \mathbf{R}$

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}[$, $\varphi(x) = F(\operatorname{tg} x)$

φ est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{4}[$ comme composée de deux fonctions dérivables.

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}[$, $\varphi'(x) = (1+\operatorname{tg}^2 x)F'(\operatorname{tg} x) = (1+\operatorname{tg}^2 x) f(\operatorname{tg} x)$

$$= (1+\operatorname{tg}^2 x)\cdot\frac{\operatorname{tg}^2 x + 2}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 2$$

b) On a : $\varphi'(x) = \operatorname{tg}^2 x + 2 = (1+\operatorname{tg}^2 x) + 1 = \operatorname{tg}' x + 1$

$\Rightarrow \varphi(x) = \operatorname{tg} x + x + C$

or $\varphi(0) = 0$ d'où $C = 0$ et par suite $\varphi(x) = x + \operatorname{tg} x$.

c) $A = \int_0^1 (f(t)-1)\,dt$ (uA) car C_f est au dessus de la droite D : $y = 1$.

$$\int_0^1 (f(t)-1)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt - \int_0^1 dt = \int_0^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} f(t)\,dt - [t]_0^1 = \varphi(\frac{\pi}{4}) - 1$$

or $\varphi(x) = x + \operatorname{tg} x$ d'où $\varphi(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} + 1$

d'où $A = \frac{\pi}{4}$ (uA).

Solution 9 :

1°/a) $0 \le x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x^2 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le -x^2 \le 0 \Leftrightarrow 0 \le 1-x^2 \le 1 \Leftrightarrow$

$0 \le \sqrt{1-x^2} \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x^n\sqrt{1-x^2} \le x^n$

d'où $0 \le \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx \le \int_0^1 x^n\,dx \Leftrightarrow 0 \le U_n \le [\frac{x^{n+1}}{n+1}]_0^1$ donc

$0 \le U_n \le \frac{1}{n+1}$

b) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

2°/$U_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2}\sqrt{1-x^2}\,dx$ on pose : $\begin{cases} u' = -2x\sqrt{1-x^2} \\ v = -\frac{x^{n+1}}{2} \end{cases}$ et

$\begin{cases} u = \frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2} \\ v' = -\frac{(n+1)x^n}{2} \end{cases}$

$U_{n+2} = [-\frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2}\frac{-x^{n+1}}{2}]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{3}\frac{-(n+1)}{2}x^n(1-x^2)^{3/2}dx$

d'où $U_{n+2} = \frac{(n+1)}{3}\int_0^1 x^n(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\,dx =$

$\frac{(n+1)}{3}\int_0^1 (x^n\sqrt{1-x^2} - x^{n+2}\sqrt{1-x^2})dx$

$U_{n+2} = \frac{(n+1)}{3}(U_n - U_{n+2})$ soit $U_{n+2} = \frac{n+1}{3}U_n - \frac{n+1}{3}U_{n+2}$ d'où U_{n+2}

$+\frac{n+1}{3}U_{n+2} = \frac{n+1}{3}U_n$

ainsi $(n+4)U_{n+2}=(n+1)U_n$ donc pour tout $n \in IN$: $U_{n+2} = \frac{n+1}{n+4}U_n$

3°/ Soit $g(x) = \sqrt{1-x^2}$

a) * g est continue sur [-1,1]

* $0 \in [-1,1]$, $\cos t \in [-1,1]$ pour tout $t \in IR$ donc $\Phi(t)$ est définie sur IR

b) Soit G une primitive de g sur [-1,1] alors pour tout $t \in IR$ on a : $\Phi(t) = G(\cos t) - G(0)$

Φ est dérivable sur IR (comme somme et composée de fonctions dérivables)

$\Phi'(t) = g(\cos t).(-\sin t)$ d'où $\Phi'(t) = -\sqrt{1-\cos^2 t}\,.\sin t = -|\sin t| \sin t$

c) $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $\Phi'(t) = -\sin^2 t$ or $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$

donc $-\sin^2 t = \frac{\cos 2t - 1}{2}$

d'où $\Phi'(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)$ et par suite $\Phi(t) = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) + C$

or $\Phi(\frac{\pi}{2}) = 0$ donc $-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin(\pi) + C = 0$ d'où $C = \frac{\pi}{4}$

on a pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $\Phi(t) = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{\pi}{4}$

$U_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \Phi(0) = \frac{\pi}{4}$

4°/a) (U_n) est une suite décroissante donc $U_{n+2} \leq U_{n+1} \leq U_n$ et comme $U_n > 0$

on a : $\frac{U_{n+2}}{U_n} \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$ soit $\frac{n+1}{n+4} \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$

b) on a : $\lim_{n\to+\infty} (\frac{n+1}{n+4}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n(1+\frac{4}{n})} = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$

c) * $U_0 = \frac{\pi}{4}$ et $U_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 (-2x)\sqrt{1-x^2}\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

$U_0.U_1 = \frac{\pi}{4}.\frac{1}{3} = \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2(0+1)(0+2)(0+3)}$

supposons que : $U_n.U_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)}$ et montrons que

$U_{n+1}.U_{n+2} = \frac{\pi}{2(n+2)(n+3)(n+4)}$

$U_{n+1}.U_{n+2} = U_{n+1}\frac{n+1}{n+4}U_n$

$= \frac{n+1}{n+4}U_n.U_{n+1} = \frac{n+1}{n+4}.\frac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{\pi}{2(n+2)(n+3)(n+4)}$

Conclusion pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n.U_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)}$

d) $U_n^2 \dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{\pi}{2n^3(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})}$ d'où $n^3 U_n^2$

$$= \frac{\pi}{2(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})} \cdot \frac{1}{\frac{U_{n+1}}{U_n}}$$

$$n\sqrt{n}\, U_n = \sqrt{\frac{\pi}{2(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})} \cdot \frac{1}{\frac{U_{n+1}}{U_n}}}$$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_{n+1}}{U_n} = 1$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sqrt{n}\, U_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

Solution 10 :

1°/ $U_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \sqrt{2}-1$

2°/ $\forall x \in [0,1]$ on a : $\dfrac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}} \geq 0$ d'où $U_n \geq 0$

3°/ a) $U_{n+1} - U_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{\sqrt{x^2+1}}dx - \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}} \leq 0$

D'où (U_n) est une suite décroissante .

b) On a : $\begin{cases} U_n \geq 0 \\ (U_n) \text{ est une suite décroissante} \end{cases}$

D'où (U_n) est convergente

4°/ $x \in [0,1]$

$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x^2+1 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{2}$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \leq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}} x^{2n+1} \leq \dfrac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}} \leq x^{2n+1}$

D'où : $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \displaystyle\int_0^1 x^{2n+1}dx \leq U_n \leq \int_0^1 x^{2n+1}dx$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2n+2} \leq U_n \leq \frac{1}{2n+2}$$

On a : $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2n+2} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+2} = 0 \end{cases}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

Solution 11 :

$f(x) = x + \sin x \geq 0$ pour $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

1°/ $\mathcal{A} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$\mathcal{A} = (\frac{\pi^2}{8} + 1)$ unité d'aires .

2°/

a) $\begin{cases} f'(x) = \sin x \\ g(x) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = -\cos x \\ g'(x) = 1 \end{cases}$

$J = \left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

$J = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

b) $V = \pi \int_0^1 f^2(x)\,dx$

$= \pi \int_0^1 (x^2 + \sin^2 x + 2x\sin x)\,dx$

Soit $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos 2x + 1}{2}\,dx$

$= \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

On a : $V = \pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \pi.\lambda + 2\pi J$

$$V = \left(\frac{\pi^4}{24} + \frac{\pi^2}{4} + 2\pi\right) \text{ unité de volume}$$

Solution 12 :

1°/ $Df = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}\right\}$

2°/ $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |f(x) - 1| \; dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + tg^2 x - 1) dx$

$$= [tgx - x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$A = \left(\frac{4-\pi}{4}\right) uA$$

3°/ a)

- $\varphi'(x) = \frac{\cos^4 x + \sin^2 x\,(3\cos^2 x)}{\cos^6 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + 3\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + 3\frac{(1-\cos^2 x)}{\cos^4 x}$$

$$\varphi'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x} = 3f^2(x) - 2f(x)$$

b) $V = \pi \int_0^1 f^2(x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx$

On a : $f^2(x) = \frac{\varphi'(x) + 2f(x)}{3}$

D'où : $V = \frac{\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\varphi'(x) + 2f(x)) \; dx$

$$V = \frac{\pi}{3}[\varphi(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{2\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$$

Or $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx = [tgx]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$

D'où $V = \frac{\pi}{3}\varphi(\frac{\pi}{4}) + \frac{2\pi}{3}$

$V = \frac{4\pi}{3}$ unité de volume

Solution 13 :

A) 1°/a) pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on a : $\cos x \neq 0$ f est définie, continue, dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

on a : pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: $f'(x) = 1+tg^2x > 0$

x	$-\pi/2$		$\pi/2$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

* On a $\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+} tg\, x = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+} \sin x = -1$

et $\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+} \cos x = 0^+$. * $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} f(x) = +\infty$.

b) Soit Δ : $y = f'(0)(x-0)+f(0)$ or $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ d'où $\Delta : y = x$.

Position de C_f et Δ : soit $d(x) = f(x) - y = tg\, x - x$

d est une fonction dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: $d'(x) = 1+tg^2x - 1 = tg^2x \geq 0$.

x	$-\pi/2$		0		$\pi/2$
$d'(x)$		+	0	+	
$f_d(x)$	$-\infty$	(-)	0	(+)	$+\infty$

On a : pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$, $d(x) < 0$

d'où C_f est en dessous de Δ sur $]-\frac{\pi}{2}, 0[$

Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$, $d(x) > 0$ d'où C_f est au dessus de Δ sur $]-\frac{\pi}{2}, 0[$

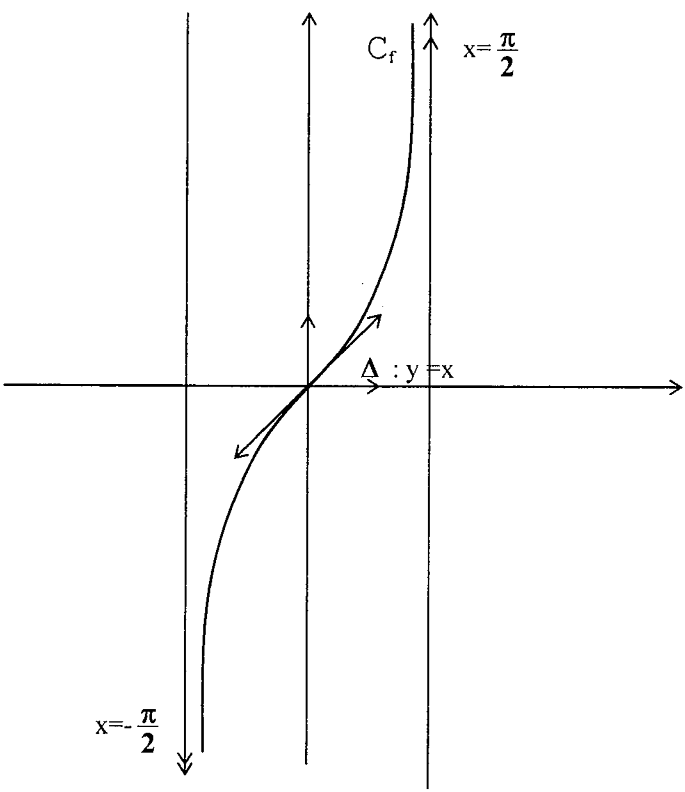
C_f coupe Δ au point O(0,0).

c)

2°/ a) f est <u>continue</u>, strictement <u>croissante</u> sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

alors f réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur

$J = f(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) =]\lim\limits_{(-\frac{\pi}{2})^+} f, \lim\limits_{(\frac{\pi}{2})^-} f[=]-\infty, +\infty[= IR$



b) f est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to IR$

et f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: $f'(x) \neq 0$.

d'où f^{-1} est dérivable sur IR.

c) On a $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{1+tg^2 y}$ où $y = f^{-1}(x)$

or $y = f^{-1}(x)$ d'où : $f(y) = x$ et par suite $tg\, y = x$

soit $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

on a : $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x (f^{-1})'(t)dt = [f^{-1}(t)]_0^x = f^{-1}(x) - f^{-1}(0)$.

or $f(0) = 0$ d'où $f^{-1}(0) = 0$ et par suite pour tout $x \in IR$: $f^{-1}(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

3°/ $I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = f^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$ car : $f(\frac{\pi}{4}) = 1$.

B) Soit $n \in IN^*$ et $a_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$ et $a_0 = 1$.

1°/ $a_{n+1} - a_n = \int_0^1 (1-t^2)^{n+1}dt - \int_0^1 (1-t^2)^n dt$

$= \int_0^1 [(1-t^2)^{n+1} - (1-t^2)^n]dt = \int_0^1 (1-t^2)^n(1-t^2-1)dt = -\int_0^1 t^2(1-t^2)^n dt$.

2°/ On a pour tout $t \in [0,1]$: $t^2 \geq 0$ et $1-t^2 \geq 0$ d'où

$t^2(1-t^2)^n \geq 0$ et par suite $a_{n+1} - a_n \leq 0$ donc (a_n) est une suite convergente.

3°/a) $a_{n+1} = \int_0^1 (1-t^2)^{n+1}dt$; $\begin{cases} u'=1 \\ v=(1-t^2)^{n+1} \end{cases}$ d'où

$\begin{cases} u=t \\ v'=(n+1)(-2t)(1-t^2)^n \end{cases}$

On a : $a_{n+1} = [t.(1-t^2)^{n+1}]_0^1 + 2(n+1)\int_0^1 t^2(1-t^2)^n dt$ $a_{n+1} = (2n+2)$ $(a_n - a_{n+1})$ (d'après B-1°)

On a ainsi $a_{n+1} = (2n+2)a_n - (2n+2)a_{n+1}$

et par suite $a_{n+1}(1+2n+2) = (2n+2)a_n$

d'où pour tout $n\in IN^*$ on a : $a_{n+1} = \dfrac{(2n+2)a_n}{3+2n}$

b) On a : $a_0 = 1$ et $\dfrac{2^{2\times 0}(0!)^2}{(2\times 0+1)!} = \dfrac{1}{1} = 1$ d'où $a_0 = \dfrac{2^{2\times 0}(0!)^2}{(2\times 0+1)!}$

Soit $n \in IN$, supposons que : $a_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ et montrons que $a_{n+1} =$
$\dfrac{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}{(2(n+1)+1)!}$.

On a : $a_{n+1} = \dfrac{(2n+2)a_n}{3+2n} = \dfrac{(2n+2)}{3+2n}\,\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \dfrac{(2n+2)^2.2^{2n}(n!)^2}{(2n+3).(2n+2).(2n+1)!}$

$$= \frac{2^2.(n+1)^2.2^{2n}(n!)^2}{(2n+3)!} = \frac{2^{2n+2}.((n+1)(n!))^2}{(2n+3)!} = \frac{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}{(2(n+1)+1)!}$$

C) $U_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{p!}{1\times 3\times 5\times\ldots\times(2p+1)}\right)$

1°/ $\dfrac{p!}{1\times 3\times 5\times\ldots\times(2p+1)} = \dfrac{p!(2\times 4\times 6\times\ldots\ldots\times 2p)}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times\ldots\times 2p\times(2p+1)} =$

$$\frac{p!((2\times 1)\times(2\times 2)\times(2\times 3)\times\ldots\ldots\times(2\times p))}{(2p+1)!} = \frac{p!.2^p.p!}{(2p+1)!} = \frac{2^p.(p!)^2}{(2p+1)!}$$

On a : $U_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{2^p.(p!)^2}{(2p+1)!} = \sum_{p=0}^{n}\frac{1}{2^p}\frac{(2^p.p!)^2}{(2p+1)!} = \sum_{p=0}^{n}\frac{1}{2^p}\int_0^1(1-t^2)^p dt =$

$$\int_0^1\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{2^p}(1-t^2)^p dt = \int_0^1\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1-t^2}{2}\right)^p dt$$

$$= \int_0^1\frac{1-\left(\dfrac{1-t^2}{2}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{1-t^2}{2}}dt = 2.\int_0^1\frac{1-\left(\dfrac{1-t^2}{2}\right)^{n+1}}{1+t^2}dt.$$

2°/ a) On pose $V_n = 2I - U_n = 2.\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{1+t^2} - 2.\int_0^1\frac{1-\left(\dfrac{1-t^2}{2}\right)^{n+1}}{1+t^2}dt$

$$= \int_0^1 [\frac{2}{1+t^2} - \frac{2(1-\left(\frac{1-t^2}{2}\right)^{n+1})}{1+t^2}]dt = \int_0^1 \frac{2\left(\frac{1-t^2}{2}\right)^{n+1}}{1+t^2}dt$$

b) On a pour tout $t \in [0,1]$: $0 \leq 1-t^2 \leq 1$ d'où $0 \leq (1-t^2)^{n+1} \leq 1$

$0 \leq t \leq 1$ d'où $1 \leq 1+t^2 \leq 2$ d'où $0 \leq \frac{(1-t^2)^{n+1}}{1+t^2} \leq 1.$

c) On a $V_n = 2 \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t^2)}dt = \frac{1}{2^n} \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n+1}}{(1+t^2)}dt$

On a pour tout $t \in [0,1]$: $0 \leq \frac{(1-t^2)^{n+1}}{1+t^2} \leq 1$ d'où $0 \leq$

$\int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n+1}}{(1+t^2)}dt \leq \int_0^1 1dt = [t]_0^1 = 1$

d'où $0 \leq V_n \leq \frac{1}{2^n}$, d'autre part $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n =$

0

3°/On a : $V_n = 2I - U_n$ = et pa suite $U_n = 2I - V_n = \frac{\pi}{2} - V_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{\pi}{2} - V_n) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

Des résultats à retenir :

- On appelle fonction logarithme népérien et on note ln , la fonction $x \mapsto \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt \quad x > 0$.
- Soit a et b deux réels strictement positifs .
  ln a > ln b , si et seulement si , a > b .
  ln a = ln b , si et seulement si , a = b .
  ln a = 0 , si et seulement si , a = 1 .
  ln a > 0 , si et seulement si , a > 1 .
  ln a < 0 , si et seulement si , 0 < a < 1 .
- $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
- Soient a et b deux réels strictement positifs .
  $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$
- Soit a un réel strictement positif
  Pour tout entier p , $\ln\left(a^p\right) = p \ln a$
  pour tout entier $p \geq 2$, $\ln\left(\sqrt[p]{a}\right) = \frac{1}{p} \ln a$.
- Pour tous entiers naturels non nuls n et m ,
  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^n x}{x^m} = 0 \text{ et } \lim_{x \to 0^+} x^m \ln^n x = 0 \quad .$$
- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que u (x) > 0 , pour tout réel x dans I .
  Alors la fonction f :
  $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$, pour tout x dans I .

- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $u(x) \neq 0$, pour tout réel x dans I .
  Alors la fonction

$f : x \mapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I et $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, pour tout x dans I .

- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $u(x) \neq 0$, pour tout réel x dans I .
  Alors la fonction $f \mapsto x = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ admet pour primitive sur I la

  fonction $f : x \mapsto \ln|u(x)| + k$, où k est une constante réelle .

- La fonction $x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$

❋❋❋❋❋❋❋❋

EXERCICES

Exercice 1 :

Calculer les limites suivantes :

1°/ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - \ln x}{2x + \ln x}$ 2°/ $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \ln x$ 3°/ $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln^2 x$

4°/ $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln(\dfrac{x+1}{x})$ 5°/ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{\ln(1+x)}$

6°/ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x}$ 7°/ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(\sqrt{x}+1)}{x}$ 8°/ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$

Exercice 2 :

Calculer les limites suivantes :

1°/ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^3+1)}{x}$ 2°/ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - \ln(x^3+4)$

3°/ $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln(\dfrac{x+1}{x})$ 4°/ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+\ln x)}{x}$

5°/ $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln(\dfrac{2x+1}{2x+3})$ 6°/ $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln x - (x+1) \ln(x+1)$

Exercice 3 :

A) 1°/ Démontrer que :

$\forall x \in [-\frac{1}{2}, +\infty[$, on a :

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} \le \ln(1+x) \le x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

2°/ En déduire $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.

B) Soit la fonction f définie par :

$$\forall x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[\ : f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)} \ ; \ f(0)=1 \ , \ f(-1)=0 .$$

1°/ Montrer que f est continue sur $[-1,+\infty[$.

2°/ Etudier la dérivabilité de f.

3°/a) Etudier le signe de u : $]-1,+\infty[\to \mathbf{R} : x \mapsto \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$

b) Etudier les variations de f.

4°/a) Soit Δ la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse $x_0 = 0$.

Etudier la position de $\mathcal{C}_f$ et Δ .

b) Tracer $\mathcal{C}_f$ dans un plan P rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 4 :

A) Soit $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad : \quad x \mapsto 1 - x^2 - \ln x$

1°/ Etudier les variations de φ.

2°/ Calculer $\varphi(1)$. En déduire le signe de $\varphi(x)$.

B) Soit $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R} \ : \ x \mapsto \frac{\ln x}{x} - x$.

1°/ Etudier les variations de f.

2°/a) Montrer que la courbe (C) de f admet une asymptote oblique D.

b) Etudier la position de (C) et D.

3°/ Tracer dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (C) de f .

Exercice 5 :

Soit la fonction g définie sur $\mathbf{R}_+$ par : $g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$.

1°/ Etudier les variations de g sur $\mathbf{R}_+$.

2°/ Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet deux solutions : 0 et α et que $1 < \alpha < 2$.

3°/ Etudier le signe de $g(x)$.

4°/ Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$: $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

a) Montrer que f est continue en 0.

b) Montrer que f est dérivable en 0.

c) Ecrire une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0.

d) Montrer que $\forall t > 0$, $\ln(1+t) \leq t$ et en déduire la position de C_f par rapport à T.

5°/a) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}$.

b) Etudier les variations de f (on introduira la fonction g dans le calcul de f').

c) Tracer C_f dans un plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 6 :

1°/ Soit la fonction $h : x \to \ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right) - \dfrac{1}{2x+1}$

a) Etudier les variations de h.

b) Etudier le signe de $h(x)$.

2°/ Soit f la fonction définie par :

$f(x) = x(x+1)\ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right)$ pour $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

$f(0) = f(-1) = 0$

a) Etudier la continuité de f.

b) Etudier la dérivabilité de f.

c) Etudier les variations de f.

Exercice 7 :

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$$

1°/ Etudier les variations de g.

2°/ a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une seule solution α.

b) Vérifier que $1{,}8<\alpha<1{,}9$.

c) Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$.

3°/ On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x^2}$.

a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall x>0,\ f'(x)=\frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}.$$

b) Vérifier que $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha^2}$.

4°/ Etudier les variations de f et tracer sa courbe (C) dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 8 :

Soit $f: x\to \ln\left|\ln|x|\right|$.

1°/ Etudier les variations de f.

2°/ Tracer $\mathcal{C}_f$.

3°/ Soit g la restriction de f à l'intervalle $]1,+\infty[$.

Montrer que g est une bijection de $]1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

Exercice 9 :

Soit m un paramètre réel.

Soit $f_m: x\to \ln(x+\sqrt{x^2+m})$

1°/ Déterminer suivant m, le domaine de définition de f_m noté D_m.

2°/ Etudier les variations de f_m.

3°/ Déterminer l'image de D_m par f_m.

4°/ Prouver que f_m admet une fonction réciproque.

Exercice 10 :

A) Soit $n \in \mathbf{N}$ et $\begin{cases} f_n(x) = 2 - nx + \dfrac{1}{\text{Log}\, x} & \text{pour } x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\\ f_n(0) = 2 \end{cases}$

1°/ Etudier la continuité de f_n à droite en $x_0 = 0$.

2°/ Etudier la dérivabilité de f_n à droite en $x_0 = 0$.

3°/ Etudier les variations de f_n. (distinguer $n = 0$ et $n \neq 0$).

4°/ Montrer que $(\mathscr{C}_n)$ (courbe représentative de f_n) admet deux asymptotes (distinguer $n = 0$ et $n \neq 0$).

5°/ Construire $(\mathscr{C}_0)$ et $(\mathscr{C}_1)$ dans le même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

B) Soit φ_n la restriction de f_n à l'intervalle $]1,+\infty[$.

1°/ Montrer que φ_n est une bijection de $]1,+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.

2°/ Montrer que pour tout entier n non nul l'équation $\varphi_n(x) = 0$ admet une seule solution α_n.

3°/ Montrer que α_{n+1} est l'unique solution de l'équation $\varphi_n(x) = x$.

4°/a) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante.

b) Montrer que (α_n) est convergente vers un réel $l \geq 1$.

c) Calculer l.

Exercice 11 :

Soit $f(x) = -\ln|\cos x|$.

1°/ Etudier les variations de f et tracer $\mathscr{C}_f$.

2°/ Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0,\dfrac{\pi}{2}[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque.

b) Calculer $g^{-1}(\ln\sqrt{2})$.

c) Etudier la dérivabilité de g^{-1}.

3°/ Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{\pi}{4} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 \le U_n \le \dfrac{\pi}{4}$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}[$ une seule solution α.

c) Montrer que (U_n) est convergente et trouver sa limite.

Exercice 12 :

1°/ Etablir que $\forall x \ge 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x \quad (\star)$.

2°/ Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{k}{n^2})$.

a) Calculer U_1 et U_2 .

b) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) Utiliser $(\star)$ pour montrer que (U_n) est une suite convergente.

Exercice 13 :

1°/ Etablir que $\forall x > 1$, $1 - \dfrac{1}{x} < \ln x < \dfrac{1}{2}(x - \dfrac{1}{x})$.

2°/ Soit $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$. Montrer que l'équation $\ln(1+nx) = x$ admet une seule solution α_n non nulle.

3°/a) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$, $\ln n < \alpha_n$.

b) Montrer que $\alpha_n < 2\ln n$ et que $\alpha_n < \ln(1+2n \ln n)$.

c) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{\ln n}$.

Exercice 14 :

1°/ Calculer à l'aide d'une intégration par parties, les intégrales :

$$\mathcal{A} = \int_1^2 \ln(1+x)\ \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \int_1^2 \ln(-x+3)\ \mathrm{d}x$$

2°/ En déduire les intégrales :

$$\mathcal{C} = \int_1^2 \ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right| \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \mathcal{D} = \int_1^2 \ln\sqrt{|x^2-2x-3|}\ \mathrm{d}x$$

Exercice 15 :

Soit $U_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \quad (n \in \mathbf{N}^*)$

1°/ Prouver que $U_n - 1 \leq \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq U_n - \frac{1}{n}$.

2°/a) En déduire que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{1}{n} + \ln n \leq U_n \leq 1 + \ln n$.

b) Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice 16 :

Soit n un entier ≥ 1.

1°/ Démontrer que pour tout entier k, compris entre 0 et $n-1$, on a :

$$\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln x\ \mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right).$$

2°/ Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par : $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$.

a) Prouver que : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $U_n - \frac{1}{n}\ln 2 \leq \int_1^2 \ln x\ \mathrm{d}x \leq U_n$.

b) Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite convergente vers une limite l.

Exercice 17 :

Soit f la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln x$$

1°/ Etudier les variations de f.

2°/ Soit λ un réel strictement positif.

a) Calculer $\mathrm{I}(\lambda)=\int_{\lambda}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$

b) Déterminer $\lim_{\lambda\to 0^+} \mathrm{I}(\lambda)$.

3°/ Pour tout entier naturel $n\geq 2$, on pose $\mathrm{S}_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$.

a) Démontrer que, pour tout k entier naturel tel que : $1\leq k\leq n-1$, on a :

$$\frac{1}{n}f(\frac{k+1}{n})\leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x\leq \frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$$

b) En déduire que $\mathrm{S}_n-\frac{1}{n}f(\frac{1}{n})\leq \mathrm{I}(\frac{1}{n})<\mathrm{S}_n$ puis que :

$$\mathrm{I}(\frac{1}{n})\leq \mathrm{S}_n\leq \mathrm{I}(\frac{1}{n})+\frac{1}{n}f(\frac{1}{n})$$

c) En déduire $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n$.

Exercice 18 :

Soit $x\in[0,1]$ et $\mathrm{P}_n(x)=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\cdot\frac{x^k}{k}$ où $n\geq 1$

1°/ a) Montrer que $\forall t\in[0,1]$, on a : $\sum_{k=0}^{n-2}(-t)^k+\frac{(-t)^{n-1}}{1+t}=\frac{1}{1+t}$

b) En déduire que $\forall x\in[0,1]$, $\ln(1+x)=\mathrm{P}_n(x)+(-1)^n\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\mathrm{d}t$

2°/ Soit $a_n=\int_0^1\frac{t^{n-1}}{1+t}\mathrm{d}t \quad (n\geq 1)$.

a) Montrer que $|a_n| \leq \frac{1}{n}$.

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} (-1)^{n-1} a_n$

3°/ Soit $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k}$. Démontrer que (U_n) est une suite convergente et donner sa limite.

SOLUTIONS

Solution 1 :

1°/ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - \text{Ln } x}{2x + \text{Ln } x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x \, (\frac{x}{\ln x} - 1)}{\ln x \, (\frac{2x}{\ln x} + 1)} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\frac{x}{\ln x} - 1}{\frac{2x}{\ln x} + 1} = -1$

2°/ $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \ln x = \lim\limits_{x \to 0^+} x(x \cdot \ln x) = 0$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} x \cdot \ln x = 0$.

3°/ $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n (\ln^2 x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^{\frac{n}{2}} \ln x)^2$

On pose $X = x^{\frac{n}{2}} \Rightarrow x = X^{\frac{2}{n}}$. Lorsque $x \to 0^+$, $X \to 0^+$ d'où :

$\lim\limits_{x \to 0^+} (x^{\frac{n}{2}} \ln x)^2 = \lim\limits_{X \to 0^+} (X \cdot \ln X^{\frac{2}{n}})^2 = \lim\limits_{X \to 0^+} (\frac{2}{n})^2 (X \cdot \ln X)^2 = 0$

car $\lim\limits_{X \to 0^+} X \cdot \ln X = 0$.

4°/ $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \, \ln x \, (\frac{x+1}{x}) = \lim\limits_{x \to 0^+} (\sqrt{x} \, \ln(x+1) - \sqrt{x} \, \ln x)$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \, \ln(x+1) = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \, \ln x = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \, \ln (\sqrt{x})^2 = \lim\limits_{x \to 0^+} 2\sqrt{x} \, \ln \sqrt{x}$

  $= \lim\limits_{x \to 0^+} 2X \cdot \ln X = 0$ $(X = \sqrt{x})$ d'où $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \, \ln (\frac{x+1}{x}) = 0$.

5°/ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{\ln(1+x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\frac{\ln(1+2x)}{2x}}{\frac{\ln(1+x)}{x}}$

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{2x} = \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$ $\quad (X = 2x)$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ d'où $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{\ln(1+x)} = 2$.

6°/ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x} = ?$. Soit la fonction $f(x) = \ln(\cos x)$.

f est dérivable en 0 et $f(0) = 0$ et $f'(x) = \dfrac{-\sin x}{\cos x}$.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0$.

7°/ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(\sqrt{x} + 1)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}^{\ 2}}$. On pose $X = \sqrt{x}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}^{\ 2}} = \lim\limits_{X \to 0^+} \dfrac{\ln(X + 1)}{X^2} = \lim\limits_{X \to 0^+} \dfrac{1}{X} \cdot \dfrac{\ln(X+1)}{X} = +\infty$

car $\lim\limits_{X \to 0^+} \dfrac{1}{X} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to 0^+} \dfrac{\ln(X+1)}{X} = 1$.

8°/ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{x^2}$

$\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(X+1)}{X} = 1$ $(X = x^2) \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{x} = 0$.

Solution 2 :

1°/ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^3 + 1)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x^3 (1 + \frac{1}{x^3})}{x}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\ln x^3}{x} + \frac{\ln(1 + \frac{1}{x^3})}{x}\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[3 \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln(1 + \frac{1}{x^3})}{x}\right] = 0 + 0 = 0$$

2°/ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - \ln(x^3 + 4) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - \ln x^3 (1 + \dfrac{4}{x^3})$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - \ln x^3 - \ln(1 + \dfrac{4}{x^3}) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 3 \ln x - \ln(1 + \dfrac{4}{x^3})$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\,(x - 3\frac{\ln x}{x}) - \ln(1 + \frac{4}{x^3}) = 0$$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + \frac{4}{x^3}) = 0$.

3°/ $\lim\limits_{x \to +\infty} x \quad \ln(\frac{x+1}{x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} x \quad \ln(1 + \frac{1}{x})$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{X \to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1 \quad (X = \frac{1}{x}).$$

4°/ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(1 + \ln x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(\ln x\,(1 + \frac{1}{\ln\ x}))}{x}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x} + \frac{\ln(1 + \frac{1}{\ln x})}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln(1 + \frac{1}{\ln x})}{x}$$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 \quad (X = \ln x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{\ln x})}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \ln(1 + \frac{1}{\ln x}) = 0 \cdot 0 = 0$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(1 + \ln x)}{x} = 0$.

5°/ $\lim\limits_{x \to +\infty} x \quad \ln(\frac{2x+1}{2x+3}) = \lim\limits_{x \to +\infty} x \quad \ln(\frac{2x+3-2}{2x+3})$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \quad \ln(1 - \frac{2}{2x+3}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{2x+3} \cdot \frac{\ln(1 - \frac{2}{2x+3})}{\frac{-2}{2x+3}}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x}{2x+3} = -1$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1-\dfrac{2}{2x+3})}{\dfrac{-2}{2x+3}} = \lim\limits_{X\to0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1 \quad (X = \dfrac{-2}{2x+3})$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} x \ln(\dfrac{2x+1}{2x+3}) = -1\cdot1 = -1$.

6°/ $\lim\limits_{x\to+\infty} x \ln x - (x+1) \ln(x+1)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x \ln x - x \ln(x+1) - \ln(x+1)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x \ln x - x \ln x(1+\dfrac{1}{x}) - \ln(x+1)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x \ln x - x \ln x - x \ln(1+\dfrac{1}{x}) - \ln(x+1)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} -x \ln(1+\dfrac{1}{x}) - \ln(x+1)$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} -x \ln(1+\dfrac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-\ln(1+\dfrac{1}{x})}{\dfrac{1}{x}}$

$= \lim\limits_{X\to0} \dfrac{-\ln(1+X)}{X} = -1 \quad (X = \dfrac{1}{x})$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} -\ln(x+1) = -\infty$ d'où

$\lim\limits_{x\to+\infty} x \ln x - (x+1) \ln(x+1) = -\infty$.

Solution 3 :

A) 1°/ • Soit $g(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{2} - \ln(1+x)$

g est définie, continue, dérivable sur $[-\frac{1}{2},+\infty[$ et

$$g'(x)=1-x+x^2-2x^3-\frac{1}{1+x}=(1-x+x^2-\frac{1}{1+x})-2x^3$$

$$=\frac{x^3}{1+x}-2x^3=\frac{x^3(-1-2x)}{1+x}$$

$$\begin{array}{c|lcccc}
x & -\frac{1}{2} & & 0 & & +\infty \\
\hline
g'(x) & 0 & + & 0 & - & \\
\hline
g(x) & & \nearrow & 0 & \searrow &
\end{array}$$

d'où $\forall x \geq \frac{-1}{2}$, on a : $g(x) \leq 0$

et par suite $\forall x \geq \frac{-1}{2}$ on a : $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2} \leq \ln(1+x)$

• Soit $h(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$

h est définie, continue, dérivable sur $[\frac{-1}{2},+\infty[$

et $h'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x-x^2=\frac{-x^3}{1+x}$

$$\begin{array}{c|lcccc}
x & -\frac{1}{2} & & 0 & & +\infty \\
\hline
h'(x) & 0 & + & 0 & - & \\
\hline
h(x) & & \nearrow & 0 & \searrow &
\end{array}$$

d'où $\forall x \geq \frac{-1}{2}$ on a : $h(x) \leq 0$

et par suite $\forall x \geq \frac{-1}{2}$, $\ln(1+x) \leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

Conclusion : $\forall x \geq \frac{-1}{2}$, $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2} \leq \ln(1+x) \leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

2°/ On a : $\forall x \geq \frac{-1}{2}$, $-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2} \leq \ln(1+x)-x \leq -\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

$\forall x \geq \frac{-1}{2}$ et $x \neq 0$, $-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{2} \leq \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \leq -\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$

$\lim\limits_{x\to 0} -\frac{1}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{1}{2}+\frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$

d'où $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

B) 1°/ $x \mapsto \frac{x}{\ln(1+x)}$ est définie, continue sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$

comme étant le quotient des fonctions continues.

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+x)}{x}} = \frac{1}{1} = 1 = f(0)$

  d'où f est continue en 0.

- $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x}{\ln(1+x)} = \lim\limits_{X\to 0^+}\frac{X-1}{\ln X} = 0 = f(-1)$ $(X = x+1)$

  d'où f est continue en -1.

Conclusion : f est continue sur $[-1,+\infty[$.

2°/ $x \mapsto \frac{x}{\ln(1+x)}$ est dérivable sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\ln(1+x)}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$

$$= \lim_{x\to 0} -\left(\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\right)\cdot\frac{1}{\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

car $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\right) = -\frac{1}{2}$ (d'après **A)** 2°/)

d'où f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$.

- $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{\dfrac{x}{\ln(1+x)}}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x}{(x+1)\ \ln(x+1)}$

$$= \lim_{X\to 0^+} \frac{X-1}{X\ \ln X} = +\infty \quad (X = x+1) \quad \text{car } \lim_{X\to 0^+} X \quad \ln X = 0^-$$

d'où f n'est pas dérivable à droite en -1.

Conclusion : f est dérivable sur $]-1,+\infty[$.

3°/a) u est définie, continue, dérivable sur $]-1,+\infty[$ et $\forall x>1$,

$$u'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$$

x	-1		0		$+\infty$
$u'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$u(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

d'où $\forall x>-1$, $u(x)\geq 0$.

b) f est définie, continue sur $[-1,+\infty[$

f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et $\forall x\in]-1,0[\cup]0,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{\ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}}{\ln^2(1+x)} = \frac{u(x)}{\ln^2(1+x)} > 0$$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X-1}{\ln X} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{\ln X} - \dfrac{1}{\ln X} = +\infty)$ $(X = x+1)$.

4°/a) $\Delta : y = f'(0)(x-0) + f(0) = \dfrac{1}{2}x + 1$.

Etudions le signe de $d(x) = f(x) - (\dfrac{1}{2}x+1)$

$\forall x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$, $d(x)=\dfrac{x}{\ln(1+x)}-\dfrac{x+2}{2}$

$=\dfrac{2x-(x+2)\ln(1+x)}{2\ \ln(1+x)}=\left(\dfrac{2x}{x+2}-\ln(1+x)\right)\dfrac{x+2}{2\ln(1+x)}$

Soit $\phi(x)=\dfrac{2x}{x+2}-\ln(1+x)$; $\phi'(x)=\dfrac{2(x+2)-2x}{(x+2)^2}-\dfrac{1}{1+x}$

$\phi'(x)=\dfrac{4}{(x+2)^2}-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{4(1+x)-(x+2)^2}{(1+x)(2+x)^2}=\dfrac{-x^2}{(1+x)(2+x)^2}\leq 0$

x	-1		0		$+\infty$
$\phi'(x)$	||	$-$	0	$-$	
$\phi(x)$		$\searrow$ (+)	0	$\searrow$ (−)	

On a : $d(x)=\dfrac{\phi(x)(x+2)}{2\ln(1+x)}$

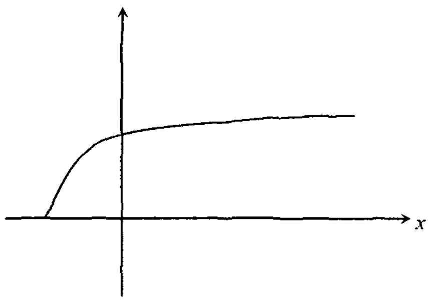
x	-1		0		$+\infty$
$x+2$		$+$		$+$	
$2\text{Log}(1+x)$		$-$	0	$+$	
$\phi(x)$		$+$	0	$-$	
$d(x)$		$-$	||	$-$	

$\forall x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$, $d(x)<0$ et par suite (C_f) est au dessous de Δ.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln(1+x)}=0$ d'où (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe $(O,\vec{i})$.

$\Delta : y=\dfrac{1}{2}x+1$ tangente à (C_f) au point (0,1).

y



Solution 4 :

A) 1°/ *φ est définie, continue et dérivable sur* $\mathbf{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$,

$\varphi'(x) = -2x - \dfrac{1}{x} < 0$ d'où :

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$			$-$		
$\varphi(x)$		$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$	

2°/ $\varphi(1) = 0$ donc, d'après le tableau des variations de φ, on a le tableau de signe suivant :

x	0		1		$+\infty$
$\varphi(x)$		$+$	0	$-$	

B) 1°/ f est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$:

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{1 - x^2 - \ln x}{x^2} = \frac{\varphi(x)}{x^2}$$

Le signe de f' est celui de $\varphi(x)$ d'où

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-\infty$ ↗	-1	↘ $-\infty$	

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \cdot \ln x - x = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} - x = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

2°/a) On a : $\forall x \in \mathbf{R}_+^*, f(x) = \frac{\ln x}{x} - x$. Et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

donc la droite D : $y = -x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

b) Etudions le signe de $f(x) + x$:

$f(x) + x = \frac{\ln x}{x}$, le signe de $f(x) + x$ sur $\mathbf{R}_+^*$ est celui de $\text{Log}\, x$.

Donc :

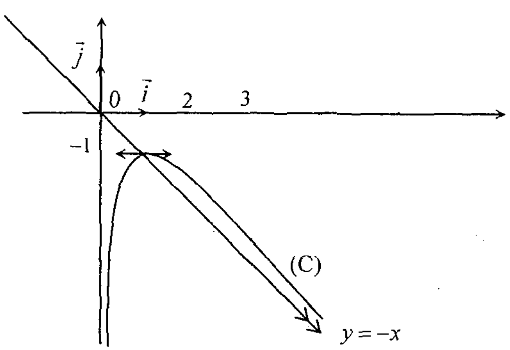
x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

D'où : • sur $]0,1[$, (C) est au dessous de D

• sur $]1,+\infty[$, (C) est au dessus de D

• au point d'abscisse 1, (C) et D se coupent.

3°/



Solution 5 :

1°/ g est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et $\forall x \in \mathbf{R}_+$,

$$g'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2} - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2x(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

Le signe de $g'(x)$ sur $\mathbf{R}_+$ est celui de $1-x^2$:

x		-1		1	
$1-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

d'où

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$1-\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

2°/• On a : $g(0)=0$ et $\forall x \in]\,0\,,1\,]$, $g(x)>0$ (d'après le tableau de variations de g) donc 0 est la seule solution de l'équation $g(x)=0$ sur $[0,1]$

• g est continue et strictement décroissante sur $[\,1\,,+\infty\,[$ donc g réalise une bijection de $[1,+\infty\,[$ sur $]\ -\infty\ ,\ 1-\ln 2\ ]$ et comme $0\in\ ]\ -\infty\ ,\ 1-\ln 2\ ]$ donc 0 admet un seul antécédent $\alpha\in]\,1\,,+\infty\,[$ par g.

Conclusion : L'équation $g(x)=0$ admet 2 solutions 0 et $\alpha>1$.

3°/ On a le tableau de variations de g :

x	0		1		α		$+\infty$
$g(x)$	0	$(+)\ \nearrow$	$1-\ln 2$	$\searrow$	0	$(-)\ \searrow$	$-\infty$

d'où le tableau de signe de g :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	0	$+$	0	$-$	

4°/a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x\ \ln(x^2+1)}{x^2}$

Or $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2} = \lim\limits_{X\to 0^+} \dfrac{\ln(X+1)}{X} = 1$

d'où $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 \cdot 1 = 0 = f(0)$ donc f est continue à droite en 0.

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2} = \lim\limits_{X \to 0^+} \dfrac{\ln(X+1)}{X} = 1$

donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$.

c) T : $y = f'_d(0) \cdot x + f(0)$ d'où T : $y = x$.

d) Soit la fonction $\varphi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$; $t \mapsto \ln(1+t) - t$

• Etudions les variations de φ :

φ est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et $\forall t \in \mathbf{R}_+$,

$\varphi'(t) = \dfrac{1}{1+t} - 1 = \dfrac{-t}{1+t}$

$\Rightarrow \forall t \in \mathbf{R}_+,\ \varphi'(t) \leq 0$.

t	0		$+\infty$
$\varphi'(t)$	0	$-$	
$\varphi(t)$	0	$\searrow$	

D'après le tableau de variations on a 0 est un maximum absolu de φ

$\Rightarrow \forall t \in \mathbf{R}_+,\ \varphi(t) \leq 0$ d'où $\forall t \in \mathbf{R}_+,\ \ln(1+t) \leq t$.

• Etudions le signe de $f(x) - x$:

$\forall t \in \mathbf{R}_+^*,\ f(x) - x = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} - x = \dfrac{\ln(x^2+1) - x^2}{x}$

Le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbf{R}_+^*$ est celui de $\text{Log}(x^2+1) - x^2$

Or $\ln(x^2+1) - x^2 = \varphi(x^2) < 0$ donc C_f est au dessous de T sur $\mathbf{R}_+$.

5°/a) On a : $g(\alpha) = 0 \Rightarrow \ln(\alpha^2+1) = \dfrac{2\alpha^2}{\alpha^2+1} \Rightarrow f(\alpha) = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}$.

b) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, on a :

$$f'(x) = \frac{\dfrac{2x}{x^2+1} \cdot x - \ln(x^2+1)}{x^2} = \frac{\dfrac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)}{x^2} = \frac{g(x)}{x}$$

$\Rightarrow$ Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

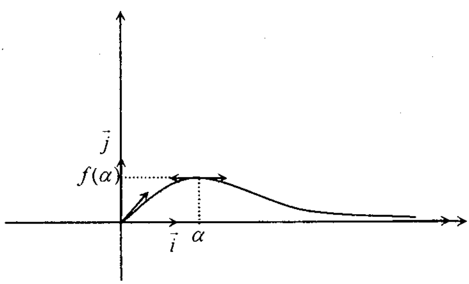
x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}$	$\searrow$	0

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x^2}{x} + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{x}$ Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\ \ln x}{x} = 0$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{x} = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

c)



Solution 6 :

1°/a) $D_h = \{\ x \in \mathbf{R}\ /\ \dfrac{x+1}{x} > 0,\ x \neq 0\ \text{ et }\ 2x+1 \neq 0\ \}$.

$D_h = \,]-\infty,-1,[\cup]0,+\infty[$.

h est définie, continue et dérivable sur $]-\infty,-1,[\cup]0,+\infty[$

$$\forall x \in D_h\ ,\ h'(x) = \frac{\left(\dfrac{x+1}{x}\right)'}{\dfrac{x+1}{x}} + \frac{2}{(2x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{2}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{-(2x+1)^2 + 2x(x+1)}{x(x+1)(2x+1)^2} = \frac{-(2x^2+2x+1)}{x(x+1)(2x+1)^2}$$

Le signe de $h'(x)$ sur D_h est celui de $-(2x^2+2x+1) < 0$ (car $\Delta' < 0$)

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$				$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$ (-)	$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$ (+)	0

b) D'après le tableau des variations de h, on en déduit :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$h(x)$		$-$				$+$	

2°/a) La fonction $f\ x \mapsto x(x+1)\ \ln(\frac{x+1}{x})$ est continue sur

$]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ comme produit et composée de fonctions continues sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$.

Continuité à droite en 0 :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x(x+1)\ \ln(\frac{x+1}{x})$$

$$= \lim_{x\to 0^+} x(x+1)\ \ (\ln(x+1)\ \ -\ln x)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} x(x+1)\ln(x+1) - x(x+1)\ln x$$

- $\lim_{x\to 0^+} x(x+1)\ln(x+1) = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} x(x+1)\ln x = 1\cdot 0 = 0$ car $\lim_{x\to 0^+} x\ \ \ln x = 0$

d'où $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ et par suite f est continue à droite en 0.

Continuité à gauche de −1 :

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} x(x+1)\ln(\frac{x+1}{x}) = \lim_{x\to -1^-} x^2\,\frac{(x+1)}{x}\ \ \ln(\frac{x+1}{x})$$

On a : $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{(x+1)}{x} \ln(\dfrac{x+1}{x}) = \lim\limits_{X \to 0^+} X \ \ln X = 0 \qquad (X = \dfrac{x+1}{x})$

- $\lim\limits_{x \to -1^-} x^2 = 1$ d'où $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 0 = f(-1)$ et par suite f et continue à gauche en -1.

Conclusion : f est continue sur **R** .

b) • La fonction $x \mapsto x(x+1) \ \ln(\dfrac{x+1}{x})$ est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables.

• ***Dérivabilité de f à droite* 0** :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x(x+1)\ln(\frac{x+1}{x})}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} (x+1)\ln(\frac{x+1}{x}) = \lim_{x \to 0^+} (x+1)\ln(1+\frac{1}{x}) = +\infty$$

car $\lim\limits_{x \to 0^+} (x+1) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(1+\dfrac{1}{x}) = \lim\limits_{X \to +\infty} \ln(1+X) = +\infty$

et par suite f n'est pas dérivable en 0.

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{x(x+1)\ln(\frac{x+1}{x})}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to -1^-} x \ \ln(\frac{x+1}{x}) = +\infty$$

et par suite f n'est pas dérivable à gauche en -1.

Conclusion : f est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ et $\mathcal{C}_f$ admet deux demi tangentes verticales aux points d'abscisses respectives : -1 et 0.

c) $\forall x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$,

$$f'(x) = (2x+1) \ \ln(\frac{x+1}{x}) + x(x+1)\frac{-1}{x(x+1)}$$

$$= (2x+1) \ \ln(\frac{x+1}{x}) - 1 = (2x+1) \ [\ln\frac{x+1}{x} - \frac{1}{2x+1}] = (2x+1) \ h(x)$$

x	$-\infty$		-1	0		$+\infty$
$2x+1$		$-$	//////		$+$	
$h(x)$		$-$	‖ ////// ‖		$+$	
$f'(x)$		$+$	//////		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0 //////	0	$\nearrow$	$+\infty$

◆ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x(x+1)\ \ln(1+\dfrac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)\ \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$

On a : • $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1 \quad (X = \dfrac{1}{x})$

d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

◆ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(x+1)\ \ln(\dfrac{x+1}{x})$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x(x+1)\ \ln(1+\dfrac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\ \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = +\infty$

Solution 7 :

1°/ g est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$,

$g'(x) = 2x - 2(2\ x\ \ \ln x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x}) = -4x\ \ \ln x$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ 1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(1+x^2-2x\cdot(x\ \ \ln x)) = 1$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ \ \ln x = 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}(1+x^2(1-2\ \ \ln x)) = -\infty$

2°/ a) D'après le tableau de variations de g on a :

- $\forall x\in]0\,,1]\,,\ g(x)\geq 1 \Rightarrow \forall x\in]0\,,1]\,,\ g(x)\neq 0$
- g est continue et strictement décroissante sur $[1\,,+\infty[$ donc g réalise une bijection de $[1\,,+\infty[$ sur $]-\infty,2[$ et comme $0\in\ ]-\infty,2[$ donc 0 admet un seul antécédent $\alpha\in\ ]1\,,+\infty[$ par g.

Conclusion : L'équation $g(x)=0$ admet une seule solution α.

b) On a : $\begin{cases} g(1{,}8)\cdot g(1{,}9)<0 \\ \text{et} \\ g \text{ est continue sur } [1{,}8\ ;\ 1{,}9] \end{cases}$ donc $1{,}8<\alpha<1{,}9$

c) On a :

x	0		1		α		$+\infty$
$g(x)$	1	$\nearrow$ (+)	2	$\searrow$	0	$\searrow$ (−)	

d'où le tableau de signe de $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		+	0	−	

3°/ a) • f est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables ($x\mapsto \ln x$ et $x\mapsto 1+x^2$).

- $\forall x\in]0\,,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot(1+x^2)-2x\ \ \ln x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2\ \ln x}{x\,(1+x^2)^2} = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$$

b) On a : $g(\alpha)=0 \Rightarrow 1+\alpha^2-2\alpha^2\ \ \ln\alpha = 0 \Rightarrow \ln\alpha = \dfrac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}$

donc $f(\alpha) = \dfrac{\dfrac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}}{1+\alpha^2} = \dfrac{1}{2\alpha^2}$.

4°/ f est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$,

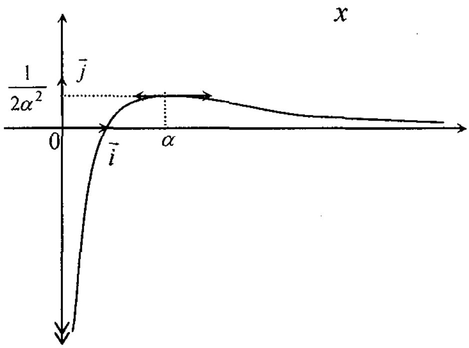
$$f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x^2)}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2\alpha^2}$	$\searrow$	0

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{1+x^2} = -\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{1+x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\dfrac{\ln x}{x}}{\dfrac{1+x^2}{x}} = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$



Solution 8 :

1°/ $f(x) = \ln\left|\ln|x|\right|$

- f est définie si et seulement si $x \neq 0$ et $\ln|x| \neq 0$

$\ln|x| = 0 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$ d'où $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

- $\forall x \in D_f$ on a : $-x \in D_f$

$f(-x)=f(x)$ donc f est une fonction paire et par suite il suffit de faire l'étude sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

$\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, $f(x)=\ln\left|\ \ln x\ \right|$

f est continue, dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et $f'(x)=\dfrac{1}{x\ \ \ln x}$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2°/ $x=0$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

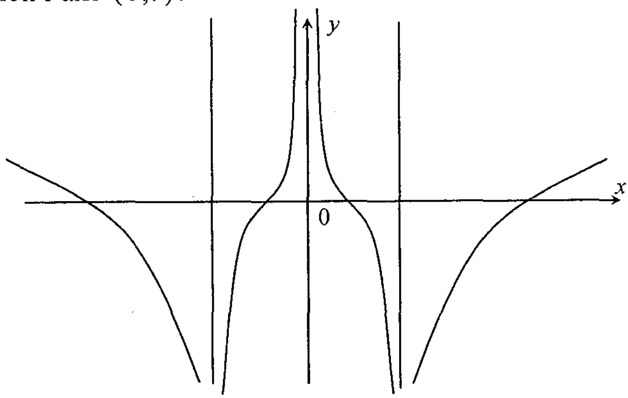
$x=1$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\cdot\frac{\ln x}{x}=0$$

car • $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

• $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}=\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0\quad(X=\ln x)$

d'où $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction l'axe $(O,\vec{i})$.



3°/ $g(x) = \ln(\ln x)$ où $x > 1$

g est définie, continue, dérivable sur $]1, +\infty[$, $g'(x) = \dfrac{1}{x \ \ln x} > 0$

x	1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

g est continue, strictement croissante sur $]1, +\infty[$ donc g est une bijection de $]1, +\infty[$ sur $g(]1, +\infty[) = \mathbf{R}$.

Solution 9 :

1°/ $D_m = \{ x \in \mathbf{R} \ / \ x^2 + m \geq 0 \text{ et } x + \sqrt{x^2 + m} > 0 \}$

- Si $m > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbf{R}$, $x^2 + m > 0$ et $x^2 + m > x^2 \Rightarrow$

  $\sqrt{x^2 + m} > |x| > -x \Rightarrow \sqrt{x^2 + m} + x > 0$ d'où $D_m = \mathbf{R}$

- Si $m = 0 \Rightarrow x + \sqrt{x^2} = x + |x| \geq 0$

  $x + |x| = 0 \Leftrightarrow |x| = -x \Leftrightarrow x \in \mathbf{R}_- \Rightarrow D_m = \mathbf{R}_+^*$

- Si $m < 0$ alors ($x^2 + m \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\sqrt{-m}] \cup [\sqrt{-m}, +\infty[$)

Etudions le signe de la fonction $g(x) = x + \sqrt{x^2 + m}$ sur $]-\infty, -\sqrt{-m}] \cup [\sqrt{-m}, +\infty[$:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + m} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + m} = -x \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

impossible car $m < 0$

d'où $\forall x \in]-\infty, -\sqrt{-m}] \cup [\sqrt{-m}, +\infty[$, $g(x) \neq 0$ et comme g est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, -\sqrt{-m}]$ et $[\sqrt{-m}, +\infty[$ donc elle garde un signe constant sur chacun de ces deux intervalles.

$\forall x \in]-\infty, -\sqrt{-m}\,]$, le signe de $g(x)$ est celui de

$g(-\sqrt{-m}) = -\sqrt{-m} < 0$

$\forall x \in [\sqrt{-m}, +\infty[$, le signe de $g(x)$ est celui de $g(\sqrt{-m}) = \sqrt{-m} > 0$

d'où $D_m = [\sqrt{-m}, +\infty[$.

Conclusion : • Si $m > 0 \Rightarrow D_m = \mathbf{R}$.

• Si $m = 0 \Rightarrow D_m = \mathbf{R}_+^*$.

• Si $m < 0 \Rightarrow D_m = [\sqrt{-m}, +\infty[$.

2°/ <u>*1er Cas*</u> : $m > 0$. f_m est définie, continue et dérivable sur D_m .

$$\forall x \in D_m ,\ f_m'(x) = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+m}}}{x + \sqrt{x^2+m}} = \frac{\sqrt{x^2+m} + x}{\sqrt{x^2+m}\,(x + \sqrt{x^2+m})} = \frac{1}{\sqrt{x^2+m}} > 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_m'(x)$		$+$	
$f_m(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x + \sqrt{x^2+m}) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(\dfrac{m}{\sqrt{x^2+m} - x}\right)$

$= \lim\limits_{X \to 0^+} \ln X = -\infty$ $\left(X = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+m-x}}\ ;\ \text{si } x \to -\infty , X \to 0^+\right)$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x + \sqrt{x^2+m}) = \lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$

<u>*2ème Cas*</u> : $m = 0$. $f_0'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$

x	0		$+\infty$
$f_0'(x)$		$+$	
$f_0(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f_0(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x + |x|) = \lim\limits_{X \to 0^+} \ln X = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x + |x|) = \lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$

<u>$3^{ème}$ Cas</u> : $m < 0$. $f_m'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + m}} > 0$

x	$\sqrt{-m}$		$+\infty$
$f_m'(x)$		$+$	
$f_m(x)$	$\ln(\sqrt{-m})$	$\nearrow$	$+\infty$

3°/ • <u>1^{er} Cas $m > 0$</u> $\Rightarrow D_m =]-\infty, +\infty[$

f_m est continue sur D_m donc $f_m(D_m)$ est l'intervalle $]-\infty, +\infty[= \mathbf{R}$.

- <u>$2^{ème}$ Cas $m = 0$</u> $\Rightarrow D_m =]0, +\infty[$; $f_m(D_m) = \mathbf{R}$.
- <u>$3^{ème}$ Cas $m < 0$</u> $\Rightarrow D_m = [\sqrt{-m}, +\infty[$; $f_m(D_m) = [\mathrm{Log}(\sqrt{-m}), +\infty[$.

4°/ f_m est continue et strictement croissante sur D_m donc f_m admet une fonction réciproque.

Solution 10 :

A) 1°/ $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 2 - nx + \dfrac{1}{\ln x} = 2$

d'où $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = f_n(0)$ et par suite f_n est continue à droite en 0.

2°/ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f_n(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2 - nx + \dfrac{1}{\ln x} - 2}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} -n + \dfrac{1}{x \ln x} = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0^-$

donc f_n n'est pas dérivable à droite en 0.

3°/ f_n est dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$

• pour $n=0$, $f_0'(x)=\dfrac{-1}{x(\ln x)^2}<0$

x	0		1		$+\infty$
$f_0'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	
$f_0(x)$	‖ 2	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	2

• pour $n\neq 0$, $f_n'(x)=-n-\dfrac{1}{x(\ln x)^2}<0$

x	0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	
$f_n(x)$	‖ 2	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

4°/ On a : $\lim\limits_{x\to 1^+} f_n(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f_n(x)=-\infty$ donc la droite d'équation $x=1$ est une asymptote verticale à C_{f_n}.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x)=2 \Rightarrow$ la droite $y=2$ est une asymptote horizontale à C_{f_0} au voisinage de $+\infty$.

• pour $n\neq 0$, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)-(2-nx)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x}=0$

d'où la droite D_n d'équation $y=2-nx$ est une asymptote à C_{f_n} au voisinage de $+\infty$.

5°/ • Etudions les positions relatives de C_0 et C_1 :

$f_1(x)-f_0(x)=-x<0$

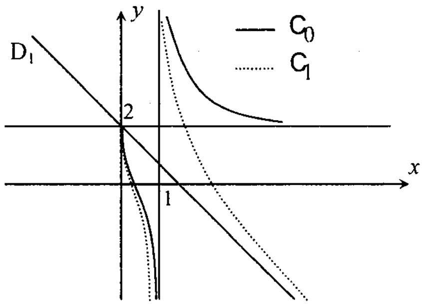
pour tout $x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$ donc sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$, C_1 est au dessous de C_0 et $C_1\cap C_0=\{\,A(0,2)\,\}$.

• Etudions la position de C_1 et D_1 : $y=-x+2$:

$f_1(x)-(-x+2)=\dfrac{1}{\ln x}$ or sur $]0,1[$, $\ln x<0$ et sur $]1,+\infty[$, $\operatorname{Log} x>0$

et par suite :

- sur $]0,1[$, C_1 est au dessous de D_1
- sur $]1,+\infty[$, C_1 est au dessus de D_1 .



B) 1°/ φ_n est continue et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$, donc φ_n est une bijection de $]1,+\infty[$ sur $\varphi_n(\,]1,+\infty[\,)=\mathrm{I}_n$.

Or • si $n=0$, $\varphi_0(\,]1,+\infty[\,)=\,]2,+\infty[$

• si $n\neq 0$, $\varphi_0(\,]1,+\infty[\,)=\mathbf{R}$.

2°/ Pour $n\neq 0$, φ_n est une bijection de $]1,+\infty[$ sur $\mathbf{R}$ donc 0 admet un seul antécédent α_n de $]1,+\infty[$ et par suite l'équation $\varphi_n(x)=0$ admet une seule solution $\alpha_n\in]1,+\infty[$.

3°/ $\varphi_n(x)=x \Leftrightarrow \varphi_n(x)-x=0 \Leftrightarrow 2-nx+\dfrac{1}{\ln x}-x=0$

$\Leftrightarrow 2-(n+1)\ x+\dfrac{1}{\ln x}=0 \Leftrightarrow \varphi_{n+1}(x)=0$

or $\varphi_{n+1}(x)=0$ admet une unique solution α_{n+1}.

4°/a) On a : $\forall n\in\mathbf{N}$, $\alpha_n>1$

pour montrer que $\alpha_{n+1}\leq\alpha_n$, il suffit de prouver que $\varphi_n(\alpha_{n+1})\geq\varphi_n(\alpha_n)$ car φ_n est décroissante sur $]1,+\infty[$.

On a : $\varphi_n(\alpha_{n+1})=\alpha_{n+1}$, $\varphi_n(\alpha_n)=0$

On a : $\alpha_{n+1}>0$ donc $\varphi_n(\alpha_{n+1})>\varphi_n(\alpha_n)$ d'où $\alpha_{n+1}\leq\alpha_n$ et par conséquent la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante.

b) (α_n) est une suite décroissante et minorée par 1 donc (α_n) est convergente vers un réel $l \geq 1$.

Solution 11 :

1°/ f est définie sur $D = \{\ x \in \mathbf{R}\ /\ \cos x \neq 0\ \}$

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbf{Z}$ d'où $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$

- $\forall x \in D$ on a : $-x \in D$ et $f(-x) = f(x)$ d'où f est paire.
- $\forall x \in D$ on a : $x + \pi \in D$ et $f(x+\pi) = f(x)$ donc f est une fonction périodique dont la période est π.

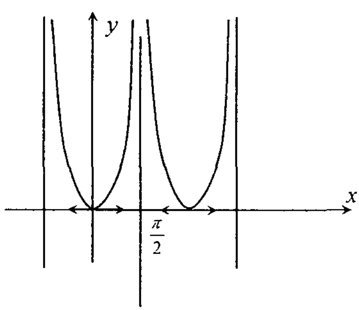
Il suffit donc de faire l'étude sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[,\ f(x) = -\ln(\cos x)$

f est définie, continue, dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$; $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$,

$f'(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \geq 0$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$+$	$\parallel$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\parallel$



2°/a) $g:[0,\frac{\pi}{2}[\to \mathbf{R}: x \mapsto -\ln(\cos x)$

g est définie, continue, strictement croissante sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ donc g est une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}[$ sur $g([0,\frac{\pi}{2}[)=\mathbf{R}_+$.

b) $g^{-1}(\ln\sqrt{2})=y \Leftrightarrow g(y)=\ln\sqrt{2} \Leftrightarrow \ln(\frac{1}{\cos y})=\ln\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \cos y=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow y=\frac{\pi}{4}$ car $y\in[0,\frac{\pi}{2}[$ d'où $g^{-1}(\ln\sqrt{2})=\frac{\pi}{4}$

c) On a: g est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ et $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}[, g'(x)\neq 0$ donc g^{-1} est dérivable sur $g(]0,\frac{\pi}{2}[)=\mathbf{R}_+^*$

Etudions la dérivabilité de g^{-1} à droite en $x_0=0$.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{g^{-1}(x)-g^{-1}(0)}{x-0}=\lim_{X\to 0^+}\frac{X-0}{f(X)-f(0)}=\lim_{X\to 0^+}\frac{1}{\frac{f(X)-f(0)}{X-0}}=+\infty$$

car $\lim\limits_{X\to 0^+}\frac{f(X)-f(0)}{X-0}=f'(0)=0^+$

d'où g^{-1} n'est pas dérivable en 0.

3°/a) Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbf{N},\ 0\le U_n\le\frac{\pi}{4}$

- pour $n=0$, $0\le U_n\le\frac{\pi}{4}$ est vraie
- supposons que pour un entier donné n, on a : $0\le U_n\le\frac{\pi}{4}$ et

montrons que $0\le U_{n+1}\le\frac{\pi}{4}$.

$0\le U_n\le\frac{\pi}{4}$ et f est strictement croissante sur $[0,\frac{\pi}{4}[$ donc

$f(0)\le f(U_n)\le f(\frac{\pi}{4})$ or $f(0)=-\mathrm{Log}(\cos 0)=0$;

$f(\frac{\pi}{4})=-\ln(\cos\frac{\pi}{4})=\ln\sqrt{2}\le\frac{\pi}{4}$ d'où $0\le U_{n+1}\le\frac{\pi}{4}$.

Conclusion : $\forall n\in\mathbf{N},\ 0\le U_n\le\frac{\pi}{4}$.

b) Etudions les variations de la fonction $h(x)=f(x)-x$ sur l'intervalle $]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}[$. h est définie, continue, dérivable sur $]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}[$.

$\forall x\in\ ]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}[\ ,\ h'(x)=f'(x)-1=\frac{\sin x}{\cos x}-1=\operatorname{tg}x-1$

x	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$		+	||
$h(x)$	$(\ln 2)-\frac{\pi}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$ ||

$\begin{cases} h \text{ est définie, continue sur }]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}[\\ h \text{ est strictement croissante sur }]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}[\end{cases}$

donc h est une bijection de $]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}[$ sur $[\ \ln 2-\frac{\pi}{3},\ +\infty\ [$

$0\in[\ \ln 2-\frac{\pi}{3},\ +\infty\ [$ donc 0 admet un seul antécédent α par h

d'où l'équation $f(x)=x$ admet dans $]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}[$ une seule solution α .

c) On a : $U_{n+1}-U_n=f(U_n)-U_n=h(U_n)$

or $\forall x\in[0,\frac{\pi}{4}]\ ,\ h'(x)=\operatorname{tg}x-1$

x	0		$\frac{\pi}{4}$
$h'(x)$		$-$	0
$h(x)$	0	$\searrow$	$\ln(\sqrt{2})-\frac{\pi}{4}$

d'où $\forall x\in[0,\frac{\pi}{4}],\ h(x)\le 0$. Or $U_n\in[0,\frac{\pi}{4}]$ donc $h(U_n)\le 0$

donc $\forall n\in\mathbf{N},\ U_{n+1}-U_n\le 0$ et par conséquent $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite décroissante minorée par 0 donc (U_n) est convergente. Soit l sa limite.

On a : $l \in [0,\frac{\pi}{4}]$, f est continue en l donc $f(l) = l \Rightarrow h(l) = 0 \Rightarrow l = 0$.

Conclusion : (U_n) est convergente vers 0.

Solution 12 :

1°/ Soit $f(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$. f est définie, continue, dérivable

sur $\mathbf{R}^+$ et $\forall x \in \mathbf{R}^+$, $f'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x} \leq 0$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$ $(-)$	

d'où $\forall x \geq 0$, $f(x) \leq 0$ et par suite on a : $\forall x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.

- Soit $g(x) = \ln(1+x) - x$. g est définie, continue, dérivable sur

$\mathbf{R}_+$ et $\forall x \in \mathbf{R}_+$, $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \leq 0$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$ $(-)$	

d'où $\forall x \geq 0$, $g(x) \leq 0$ et par suite on a : $\forall x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$.

Conclusion : $\forall x \geq 0$, $\forall x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

2°/a) $U_1 = \sum_{k=1}^{1} \ln(1 + \frac{k}{1^2}) = \ln 2$

$$U_2 = \sum_{k=1}^{2} \ln(1+\frac{k}{4}) = \ln(1+\frac{1}{4}) + \ln(1+\frac{2}{4})$$

$$= \ln\frac{5}{4} + \ln\frac{6}{4} = \ln\frac{30}{16} \Rightarrow U_2 = \ln\frac{15}{8}$$

b) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbf{N}^*$ on a : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+)(2n+1)}{6}$

• pour $n = 1$, $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$

• supposons que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et montrons que

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= (n+1)(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)) = (n+1)(\frac{2n^2+7n+6}{6})$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \text{ d'où } \forall n \in \mathbf{N}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

c) On prend $x = \frac{k}{n^2}$ dans (*) on obtient :

$$\forall k \geq 1, \ \frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln(1 + \frac{k}{n^2}) \leq \frac{k}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2n^4} \leq \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{k}{n^2}) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2 \leq \mathrm{U}_n \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$$

or $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

d'où $\forall n \geq 1$, $\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq \mathrm{U}_n \leq \frac{n+1}{2n}$

• $\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

• $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$ d'où $(\mathrm{U}_n)_{n\geq 1}$ est une suite convergente vers $\frac{1}{2}$.

Solution 13 :

1°/ Soit $f(x)=1-\frac{1}{x}-\ln x \quad (x>1)$.

f est définie, continue, dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\forall x>1$,

$f'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x^2}<0$

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$0 \searrow (-)$

d'où $\forall x>1,\ f(x)<0$ et par suite $\forall x>1,\ 1-\frac{1}{x}<\ln x$

- Soit $g(x)=\ln x-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x}) \quad (x>1)$

g est définie, continue, dérivable sur $]1,+\infty[$

$\forall x>1,\ g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{x^2})=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2x^2}=\frac{2x-x^2-1}{2x^2}$

$=\frac{-(x^2-2x+1)}{2x^2}=\frac{-(x-1)^2}{2x^2}<0$

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$0 \searrow (-)$

on a : $\forall x>1,\ g(x)<0 \Rightarrow \ln x<\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$

Conclusion : $\forall x>1,\ 1-\frac{1}{x}<\ln x<\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$.

2°/ Soit $\phi_n(x)=\ln(1+nx)-x$. ϕ_n est définie, continue, dérivable sur $]-\frac{1}{n},+\infty[$ et $\forall x>\frac{-1}{n}$ $\phi'_n(x)=\frac{n}{1+nx}-1=\frac{n-1-nx}{1+nx}$

$\phi'_n(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}>-\frac{1}{n}$

x	$-\frac{1}{n}$		$1-\frac{1}{n}$		$+\infty$
$\phi_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$\phi_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$M>0$	$\searrow$	$-\infty$

$M=\phi_n(1-\frac{1}{n})=\ln(1+n-1)-(1-\frac{1}{n})=\ln n-(1-\frac{1}{n})>0$ (d'après 1°/)

• On a : ϕ_n est une bijection de $]-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}[$ sur $]-\infty,M[$

or $0\in]-\infty,M[$ d'où l'équation $\phi_n(x)=0$ admet dans l'intervalle

$]-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}[$ une seule solution. Comme $\phi_n(0)=0$ et

$0\in]-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}[$ donc cette solution est nulle.

• On a : ϕ_n est une bijection de $[1-\frac{1}{n},+\infty[$ sur $]-\infty,M]$

$0\in]-\infty,M]$ d'où l'équation $\phi_n(x)=0$ admet une seule solution

α_n dans l'intervalle $]1-\frac{1}{n},+\infty[$.

3°/a) On a : $\ln(1+n\alpha_n)=\alpha_n$

On a : $\alpha_n>1-\frac{1}{n}\Rightarrow n\alpha_n>n-1\Rightarrow n\alpha_n+1>n$

$\Rightarrow \ln(1+n\alpha_n)>\ln n \Rightarrow \alpha_n>\ln n$

b) On a : $\phi_n(2\ln n)=\ln(1+2n\ln n)-2\ln n$

$$=\ln(1+2n\ln n)-\ln n^2=\ln(\frac{1+2n\ln n}{n^2})$$

or $\ln n<\frac{1}{2}(n-\frac{1}{n})\Rightarrow 2n\ln n+1<n^2\Rightarrow \ln(\frac{2n\ln n+1}{n^2})<0$

$\Rightarrow \phi_n(2\ln n)<0$

On a : $1-\frac{1}{n}<\ln n<2\ln n$

ϕ_n est strictement décroissante sur $[1-\frac{1}{n},+\infty[$; $\alpha_n\in[1-\frac{1}{n},+\infty[$.

$2\ln n \in [1-\frac{1}{n}, +\infty[$; $\phi_n(2\ln n) < 0 = \phi_n(\alpha_n)$

d'où $\alpha_n < 2\ln n \Rightarrow 1+n\alpha_n < 1+2n\ln n$

or $\ln(1+n\alpha_n) = \alpha_n$ d'où $\alpha_n < \ln(1+2n\ln n)$

Conclusion : $\forall n \geq 2$, $\ln n < \alpha_n < \ln(1+2n\ln n)$

c) $1 < \dfrac{\alpha_n}{\ln n} < \dfrac{\ln(1+2n\ln n)}{\ln n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+2n\ln n)}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left[n\ln n\left(2+\frac{1}{n\ln n}\right)\right]}{\ln n}$$

$$= 1 + \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} + \frac{\ln\left(2+\frac{1}{n\ln n}\right)}{\ln n} = 1 \quad \text{car :}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(2+\frac{1}{n\ln n}\right)}{\ln n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_n}{\ln n} = 1$.

Solution 14 :

1°/• $A = \int_1^2 \ln(1+x)\, dx$

Posons $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln(1+x) \end{cases}$ et $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{1}{1+x} \end{cases}$

D'où $A = [x\ln(1+x)]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{1+x}\, dx$

Calculons $\int_1^2 \frac{x}{1+x}\, dx$.

$$\int_1^2 \frac{x}{1+x}\, dx = \int_1^2 \frac{x+1-1}{1+x}\, dx = \int_1^2 1 - \frac{1}{1+x}\, dx$$

$$= [x - \ln(1+x)]_1^2 = 1 + \ln\frac{2}{3}$$

d'où $\mathcal{A} = 2 \ln 3 - \ln 2 - 1 - \ln\dfrac{2}{3} = 3\ln 3 - 2\ln 2 - 1 = \ln\dfrac{27}{4} - 1$.

• $B = \int_1^2 \ln(-x+3)\, dx$

Posons $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln(-x+3) \end{cases}$ et $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \dfrac{-1}{-x+3} \end{cases}$

$B = [x \ln(-x+3)]_1^2 - \int_1^2 \dfrac{-x}{3-x}\, dx$

Calculons $\int_1^2 \dfrac{-x}{3-x} dx$:

$\int_1^2 \dfrac{-x}{3-x}\, dx = \int_1^2 \left(1 + \dfrac{-3}{3-x}\right) dx = [x + 3\ln|3-x|]_1^2$

$= 2 - (1 + 3\ln 2) = 1 - 3\ln 2$

D'où $B = -\ln 2 - (1 - 3\ln 2) = 2\ln 2 - 1$

2°/• $C = \int_1^2 \ln\left|\dfrac{x-3}{x+1}\right| dx = \int_1^2 \ln|x-3|\, dx - \int_1^2 \ln|x+1|\, dx$

or pour $x \in [1,2]$, $x - 3 < 0 \Rightarrow \ln|x-3| = \ln(-x+3)$ et $x+1 > 0 \Rightarrow$

$\ln|x+1| = \ln(x+1)$ et par suite l'intégrale C s'écrit :

$C = \int_1^2 \ln(-x+3)\, dx - \int_1^2 \ln(x+1)\, dx = B - A$

$= 2\ln 2 - 1 - (\ln\dfrac{27}{4} - 1) = \ln\dfrac{16}{27}$

$D = \int_1^2 \ln\sqrt{|x^2 - 2x - 3|}\, dx = \dfrac{1}{2}\int_1^2 \ln|x^2 - 2x - 3|\, dx$

$= \dfrac{1}{2}\int_1^2 \ln|(x-3)(x+1)|\, dx = \dfrac{1}{2}\int_1^2 \ln|x-3|\, dx + \dfrac{1}{2}\int_1^2 \ln|x+1|\, dx$

$= \dfrac{1}{2}(A + B) = \dfrac{1}{2}(2\ln 2 - 1 + \ln\dfrac{27}{4} - 1) = \dfrac{1}{2}\ln(27) - 1$

Solution 15 :

1°/On a : $\displaystyle\int_1^n \frac{dx}{x} = \int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_2^3 \frac{dx}{x} + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{dx}{x} = \sum_{p=1}^{n-1} \int_p^{p+1} \frac{1}{x}\,dx$

or $\forall x \in [p\,,\,p+1]$ on a : $\displaystyle\frac{1}{p+1} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{1}{p+1} \le \int_p^{p+1} \frac{1}{x}\,dx \le \frac{1}{p}$

$$\Rightarrow \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p+1} \le \sum_{p=1}^{n-1} \int_p^{p+1} \frac{1}{x}\,dx \le \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \le \int_1^n \frac{dx}{x} \le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

$$\Rightarrow U_n - 1 \le \int_1^n \frac{dx}{x} \le U_n - \frac{1}{n}$$

2°/a) On a : $\displaystyle\int_1^n \frac{dx}{x} = \left[\ln x\right]_1^n = \ln n$

d'où $U_n - 1 \le \ln n \le U_n - \dfrac{1}{n} \Rightarrow \ln n + \dfrac{1}{n} \le U_n \le 1 + \ln n$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln n + \frac{1}{n} = +\infty$ d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

Solution 16 :

$1 + \dfrac{k}{n} \le x \le 1 + \dfrac{k+1}{n} \Rightarrow \ln(1 + \dfrac{k}{n}) \le \ln x \le \ln(1 + \dfrac{k+1}{n})$

car la fonction Log est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

En passant à l'intégrale on obtient :

$$\int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(1+\frac{k}{n})\;dx \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln x\;dx \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(1+\frac{k+1}{n})\;dx$$

$$\Rightarrow \ln(1+\frac{k}{n})\;\left[x\right]_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln x\;dx \le \ln(1+\frac{k+1}{n})\;\left[x\right]_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}}$$

d'où $\displaystyle\frac{1}{n}\ln(1+\frac{k}{n}) \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln x\;dx \le \frac{1}{n}\;\ln(1+\frac{k+1}{n})$

2°/ a) On a : $\forall n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $0 \le k \le n-1$:

$$\frac{1}{n}\ln(1+\frac{k}{n}) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln x \quad dx \leq \frac{1}{n}\ln(1+\frac{k+1}{n})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln(1+\frac{k}{n}) \leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln x \quad dx \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln(1+\frac{k+1}{n})$$

or $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln(1+\frac{k}{n}) = \frac{1}{n}(\ln 1+\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})-\ln(1+\frac{n}{n}) = U_n - \frac{1}{n}\ln 2$

• Montrons que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln(1+\frac{k+1}{n}) = U_n$.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln(1+\frac{k+1}{n}) = \frac{1}{n}(\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})) = U_n$$

• $\sum_{k=0}^{n-1}\int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln x \quad dx = \int_{1}^{1+\frac{1}{n}} \ln x \quad dx + \int_{1+\frac{1}{n}}^{1+\frac{2}{n}} \ln x \ dx + \cdots$

$$\cdots + \int_{1+\frac{n-2}{n}}^{1+\frac{n-1}{n}} \ln x \quad dx + \int_{1+\frac{n-1}{n}}^{1+\frac{n}{n}} \ln x \quad dx = \int_{1}^{2} \ln x \quad dx$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $U_n - \frac{1}{n}\ln 2 \leq \int_1^2 \ln x \ dx \leq U_n$.

b) On a : $U_n - \frac{1}{n}\ln 2 \leq \int_1^2 \ln x \quad dx$

donc $U_n \leq \frac{1}{n}\ln 2 + \int_1^2 \ln x \quad dx$

d'où $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\int_1^2 \ln x \quad dx \leq U_n \leq \frac{1}{n}\ln 2 + \int_1^2 \ln x \quad dx$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln 2 + \int_1^2 \ln x \ dx = 0 + \int_1^2 \ln x \quad dx = \int_1^2 \ln x \quad dx$$

d'où $\lim_{n\to+\infty} U_n = \int_1^2 \ln x \quad dx = \left[x \quad \ln x - x\right]_1^2 = 2 \quad \ln 2 - 1 = l$.

Conclusion : (U_n) est une suite convergente vers $l = 2\ln 2 - l$.

Solution 17 :

f est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$;

$$f'(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}(\frac{x^2-1}{x})$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x(\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{4})=+\infty \text{ car } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

$$\mathrm{I}(\lambda)=\int_\lambda^1(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln x)\,dx \int_\lambda^1(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4})\,dx-\frac{1}{2}\int_\lambda^1 \ln x\,dx$$

- $\displaystyle\int_\lambda^1(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4})dx=\frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_\lambda^1=\frac{-\lambda^3}{12}+\frac{\lambda}{4}-\frac{1}{6}$

- Intégrons par parties : $\displaystyle\int_\lambda^1 \ln x\,dx$.

Posons $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=\ln x\end{cases}$ et $\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=\dfrac{1}{x}\end{cases}$

D'où

$$\int_\lambda^1 \ln x\,dx=[x\ln x]_\lambda^1-\int_\lambda^1 1\,dx=-\lambda\ln\lambda-[x]_\lambda^1=-\lambda\ln\lambda-1+\lambda$$

Il en résulte que :

$$\mathrm{I}(\lambda)=-\frac{\lambda^3}{12}+\frac{\lambda}{4}-\frac{1}{6}+\frac{\lambda}{2}\ln\lambda-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{\lambda^3}{12}-\frac{\lambda}{4}+\frac{\lambda}{2}\ln\lambda+\frac{1}{3}$$

b) $\displaystyle\lim_{\lambda\to0^+}\mathrm{I}(\lambda)=\frac{1}{3}$ car $\displaystyle\lim_{\lambda\to0^+}\lambda\ln\lambda=0$.

3°/ a) f est décroissante sur $]0,1]$ et pour tout $1\le k\le n-1$ on a :

$$[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]\subset]0,1] \text{ donc } \frac{k}{n}\le x\le\frac{k+1}{n}\Rightarrow f(\frac{k+1}{n})\le f(x)\le f(\frac{k}{n})$$

En intégrant sur $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, on obtient :

$$f(\frac{k+1}{n})\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dx \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq f(\frac{k}{n})\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dx$$

$$\Rightarrow (\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n})f(\frac{k+1}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq (\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n})f(\frac{k}{n})$$

Il en résulte que $\frac{1}{n}f(\frac{k+1}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$.

b) On a : d'après a) pour tout $1 \leq k \leq n-1$

$$\frac{1}{n}f(\frac{k+1}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k+1}{n}) \leq \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n}) \quad (*)$$

• $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k+1}{n}) = \frac{1}{n}(f(\frac{2}{n})+f(\frac{3}{n})+f(\frac{4}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n}))$

$$=\frac{1}{n}(f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+f(\frac{3}{n})+f(\frac{4}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})-f(\frac{1}{n}))$$

donc $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k+1}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) - \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) = S_n - \frac{1}{n}f(\frac{1}{n})$

• $\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(x)dx + \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} f(x)dx + \cdots + \int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n}} f(x)dx$

En utilisant la relation de Chasles, on trouve que :

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx = I(\frac{1}{n})$$

• $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \frac{1}{n}(f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+f(\frac{3}{n})+f(\frac{4}{n})+\cdots+f(\frac{n-1}{n}))$

or $f(\frac{n}{n}) = f(1) = 0$

donc $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \frac{1}{n}(f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + f(\frac{3}{n}) + f(\frac{4}{n}) + \cdots + f(\frac{n}{n})) = S_n$

Les inégalités (*) sont équivalentes donc $S_n - \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) \leq I(\frac{1}{n}) \leq S_n$.

• On a : $S_n - \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) \leq I(\frac{1}{n}) \Rightarrow S_n \leq \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) + I(\frac{1}{n})$

d'où $I(\frac{1}{n}) \leq S_n \leq \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) + I(\frac{1}{n})$.

c) • On a montré que $\lim_{\lambda \to 0^+} I(\lambda) = \frac{1}{3}$ et on a :

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0^+$ donc $\lim_{n\to+\infty} I(\frac{1}{n}) = \frac{1}{3}$.

• Calculons $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} f(\frac{1}{n})$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} f(\frac{1}{n}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}(\frac{1}{4n^2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{n})$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{4n^3} - \frac{1}{4n} + \frac{1}{2}\frac{\ln n}{n}) = 0$$

on a donc pour tout $n \geq 1$, $I_n(\frac{1}{n}) \leq S_n \leq \frac{1}{n}f(\frac{1}{n})f(\frac{1}{n}) + I(\frac{1}{n})$

et $\lim_{n\to+\infty} I_n(\frac{1}{n}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) + I(\frac{1}{n}) = \frac{1}{3}$ donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{3}$.

Solution 18 :

1°/a) Pour tout réel $t \neq -1$, $\sum_{k=0}^{n-2}(-t)^k$ est la somme des $(n-1)$ termes d'une suite géométrique de 1^{er} terme 1 et de raison $-t$

donc $\sum_{k=0}^{n-2}(-t)^k = \frac{1-(-t)^{n-1}}{1+t} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-2}(-t)^k + \frac{(-t)^{n-1}}{1+t} = \frac{1}{1+t}$

b) Pour tout $x \in [0,1]$, on peut intégrer entre 0 et x les deux membres de cette égalité d'où :

$$\int_0^x \sum_{k=0}^{n-2}(-t)^k \mathrm{d}t + \int_0^x \frac{(-t)^{n-1}}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \int_0^x t^k \mathrm{d}\ t + (-1)^{n-1}\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\ \mathrm{d}\ t = \left[\ln(1+t)\right]_0^x$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + (-1)^{n-1}\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\ \mathrm{d}\ t = \ln(1+x)$$

or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = (-1)^0\frac{x^1}{1} + \frac{(-1)^1 x^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-2}x^{n-1}}{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$

d'où $\displaystyle \ln(1+x) = \mathrm{P}_n(x) + (-1)^{n-1}\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\ \mathrm{d}\ t$

2°/ a) Pour tout réel $t\in[0,1]$, on a : $0\le t\le 1 \Rightarrow 1\le 1+t\le 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+t}\le 1 \Rightarrow \frac{t^{n-1}}{1+t}\le t^{n-1}$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et 1 , on obtient :

$\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n-1}}{1+t}\mathrm{d}t \le \int_0^1 t^{n-1}\mathrm{d}t$ or $\displaystyle\int_0^1 t^{n-1}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^n}{n}\right] = \frac{1}{n}$ et comme m $a_n \ge 0$ on en déduit : $\left|a_n\right| \le \dfrac{1}{n}$.

b) On a : $\forall n\in\mathbf{N}^*$: $\left|(-1)^{n-1}a_n\right| = \left|a_n\right| \le \dfrac{1}{n}$ et comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n-1}a_n = 0$.

3°/ D'après 1°/ on a :

pour tout réel $x\in[0,1]$, $\displaystyle \ln(1+x) = \mathrm{P}_n(x) + (-1)^{n-1}\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\ \mathrm{d}t$

en particulier pour $x=1$, on obtient : $\ln 2 = \mathrm{P}_n(1) + (-1)^{n-1}a_n$

$$\Rightarrow -\mathrm{P}_n(1) = (-1)^{n-1}a_n - \ln 2 \Rightarrow -\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = (-1)^{n-1}a_n - \ln 2$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k} = (-1)^{n-1}a_n - \ln 2 \Rightarrow \mathrm{U}_n = (-1)^{n-1}a_n - \ln 2$$

or d'après 2°/ la suite de terme général $(-1)^{n-1}a_n$ converge vers 0 donc la suite (U_n) converge vers $-\ln 2$.

Conclusion : La suite (U_n) converge vers $\ln\dfrac{1}{2}$.

FONCTION EXPONENTIELLE

Des résultats à retenir :

- On appelle fonction exponentielle la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien .
  L'image d'un réel x par la fonction exponentielle est noté e^x .
- ℕ pour tout réel x et pour tout réel strictement positif y ,
  $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$.
  - *pour tout réel* x , $\ln(e^x) = x$.
  - pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.
  - $\ln e = 1$.
- Soit deux réels a et b .

  P_1 . $e^{a+b} = e^a \times e^b$, $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$ $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$.

  P_2 . pour tout entier n , $e^{na} = \left(e^a\right)^n$.

  P_3 . pour tout entier naturel $q \geq 2$, $e^{\frac{a}{q}} = \sqrt[q]{e^a}$.

  P_4 . pour tout entier naturel $q \geq 2$ et tout entier p , $e^{\frac{p}{q}a} = \sqrt[q]{e^{pa}}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.
- La fonction exponentielle est dérivable sur ℝ et sa fonction dérivée est la fonction $x \mapsto e^x$.
  La fonction exponentielle est strictement croissante sur ℝ .
- La fonction exponentielle est bijective de ℝ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel x , $e^x > 0$.
- Soit m et n deux entiers naturels non nuls ,
  $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{nx}}{x^m} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^m e^{nx} = 0$.

- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
  La fonction h : $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $h'(x) = u'(x)\,e^{u(x)}$, $x \in I$.
- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
  Les primitives sur I de la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sont les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + k$, $k \in \mathbb{R}$.
- Soit un réel $a > 0$. Pour tout réel b, on pose $a^b = e^{b\ln a}$.
- Pour tous nombres réels strictement positifs a et b et tous réels c et d,

$$a^{c+d} = a^c \times a^d \; ; \; (a^c)^d = a^{cd} \; ; \; a^{c-d} = \frac{a^c}{a^d} \; ; \; a^c \times b^c = (ab)^c \; ; \; \frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c .$$

- Soit un réel $a > 0$. On appelle fonction exponentielle de base a l fonction $x \mapsto a^x$.
- Soit un réel $a > 0$. La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa onction dérivée est al fonction $x \mapsto (\ln a)a^x$.
  - Si $a > 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$
  - Si $0 < a < 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.
- Soit r un rationnel. On appelle fonction puissante r la fonction $x \mapsto e^{r.\ln x}$, $x > 0$.
  - Si $r > 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x^r = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} x^r = 0$.
  - Si $r < 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x^r = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^+} x^r = +\infty$.
- Soit r un rationnel. la fonction $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto rx^{r-1}$
- Soit r un rationnel différent de -1. les primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto x^r$ sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{r+1}x^{r+1} + k, k \in \mathbb{R}$.
- Soit r un rationnel strictement positif.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0 \; ; \; \lim_{x \to 0^+} x^r \ln x = 0 \; ; \; \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty .$$

EXERCICES

Exercice 1 :

Calculer les limites suivantes :

$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{e^{x}-1}$ $\quad b)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}-2x^{2}}{x+4}$ $\quad c)\ \lim\limits_{x\to+\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$

$d)\ \lim\limits_{x\to-\infty}x^{3}e^{x+2}$ $\quad e)\ \lim\limits_{x\to-\infty}x^{n}e^{x}\ \ (n\in\mathbf{N}^{*})$ $\quad f)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{(x+1)^{3}}$

$g)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(e^{x}+1)}{x}$ $\quad h)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(e^{x}+1)-x$ $\quad i)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\ln(e^{x}+e^{-x})$

$j)\ \lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x}$ $\quad k)\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}\ln(1+e^{x})$ $\quad l)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x\ \ e^{\frac{x}{x^{2}-1}}-x)$

Exercice 2 :

1°/ Démontrer que $\forall x\in[0,1]$ on a : $1+x+\dfrac{x^{2}}{2}\le e^{x}\le 1+x+\dfrac{x^{2}}{2}+\dfrac{x^{3}}{3}$.

2°/ Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbf{R}:\ x\mapsto\begin{cases}\dfrac{x}{e^{x}-1} & \text{si } x>0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$

Montrer que f est continue, dérivable en 0.

3°/ Etudier le signe de la fonction $g:\ [0,+\infty[\ \to\mathbf{R}:\ x\mapsto e^{x}-1-xe^{x}$.

4°/ Etudier les variations de f.

5°/ Tracer (C) dans un repère orthonormé .

Exercice 3 :

Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\ :\ x\mapsto\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$.

1°/ Montrer que f est définie sur $\mathbf{R}$ et que $\forall x\in\mathbf{R}$, $-1<f(x)<1$.

2°/ a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que : $\forall x \in \mathbf{R}$,
$f'(x) = 1 - (f(x))^2$.

b) En déduire le signe de $f'(x)$.

3°/ Etudier les variation de f.

4°/ Montrer que f est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $]-1,1[$. Expliciter f^{-1}.

5°/ a) Ecrire une équation de la tangente (T) à C_f au point O.

b) Etudier la position de C_f et (T).

6°/ Tracer dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$.

Exercice 4 :

A) Soit $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$: $x \mapsto e^x - x - 1$.

1°/ Etudier les variations de h.

2°/ En déduire que $\forall x \in \mathbf{R}$, $e^x \geq x + 1$.

B) Soit $g : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$: $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x \cdot e^{2x}} & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$

1°/ Prouver que g est continue sur $\mathbf{R}_+$.

2°/ Prouver que $\forall x > 0$, $e^{-2x} < g(x)$.

3°/ a) Calculer pour tout $x > 0$, $g'(x)$.

b) Prouver que $\forall x > 0$, $g'(x) < -e^{-2x}$.

4°/ a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

b) Former le tableau de variations de g.

5°/ Montrer que g est une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur un intervalle J que l'on précisera.

Exercice 5 :

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$: $x \mapsto \begin{cases} x \cdot e^{\frac{-1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ \ln(1-x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

1°/ Montrer que $D_f = \mathbf{R}$.

2°/ Montrer que f est continue en 0.

3°/a) Etudier la dérivabilité de f en 0.

b) Interpréter géométriquement le résultat.

4°/a) Montrer que D : $y = x - 1$ est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter.

5°/a) Etudier les variations de f.

b) Tracer C_f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 6 :

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x^3} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1°/ Montrer que f est continue sur **R**.

2°/ Montrer que f est dérivable sur **R**.

3°/ Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative ($\mathscr{C}$) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4/ Soit F : $[1, +\infty[\to \mathbf{R} : x \mapsto \dfrac{1}{2} e^{\frac{-1}{x^2}}$.

a) Montrer en utilisant le théorème des accroissements finis que :

$\forall x \geq 1 \;:\; f(x+1) \leq F(x+1) - F(x) \leq f(x) \quad (\bigstar)$.

b) Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définie par : $U_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$.

Utiliser ($\bigstar$) pour montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^* :\; \dfrac{e^{\frac{-1}{(n+1)^2}} - e^{-1}}{2n} \leq U_n \leq \dfrac{e^{\frac{-1}{n^2}} + e^{-1}}{2n}$.

En déduire que $(U_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est convergente.

Exercice 7 :

Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R} : x \mapsto \dfrac{e^x}{x+2}$.

1°/a) Etudier les variations de f.

b) Prouver que $\forall x \in [0,1]$ on a : $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$.

2°/ Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $[0,1]$ une seule solution notée a.

3°/ Soit la suite $(U_n)_{n\in N}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Prouver que $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leq U_n \leq 1$.

b) Démontrer que $\forall n \in \mathbf{N},\ |U_{n+1} - a| \leq \frac{2}{3}|U_n - a|$.

c) Montrer que (U_n) est convergente vers a.

d) Trouver le plus petit entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0,\ |U_n - a| \leq 10^{-3}$.

Exercice 8 :

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}$ par : $f_n(x) = 1 + \frac{x}{n+1} - e^{\frac{x}{n}}$.

1°/a) Etudier les variations de f_n.

b) Montrer que f_n admet un maximum strictement positif que l'on calculera.

2°/a) Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_n)$ représentant f_n admet une asymptote oblique Δ_n dont précisera une équation.

b) Tracer $(\mathcal{C}_2)$.

3°/ Démontrer que sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une racine unique que l'on notera x_n.

B) 1°/ Soit $x > 1$ et $\varphi(x) = \frac{2}{x} + \ln(\frac{x-1}{x+1})$.

Etudier le signe de $\varphi(x)$ pour tout réel $x > 1$.

2°/a) Montrer que $f_n(-2) < 0$ (on pourra introduire φ).

b) Montrer alors que $x_n > -2$.

3°/ Soit $x>0$ et $\psi(x)=\dfrac{2x+1}{2x(x+1)}+\ln(\dfrac{x}{x+1})$

a) Etudier le signe de $\psi(x)$.

b) Prouver que $f_n(2n\ \ln(\dfrac{n}{n+1})=\dfrac{2n}{n+1}\psi(n)$.

4°/a) Montrer alors que $x_n<2n\ \ln(\dfrac{n}{n+1})$.

b) En déduire que la suite de terme général x_n admet une limite finie que l'on calculera.

Exercice 9 :

Soit n un entier naturel non nul.

Soit la fonction f_n définie par : $\forall x>0,\ f_n(x)=x e^{\frac{-1}{nx}}$ et $f_n(0)=0$.

1°/ Etudier les variations de f_n.

2°/a) Montrer que $\forall t>0$, $0\le e^{-t}-(1-t)\le\dfrac{t^2}{2}$.

b) En déduire que $\forall x>0$, $0\le f_n(x)-(x-\dfrac{1}{n})\le\dfrac{1}{2n^2x}$.

3°/a) Montrer que la droite D_n d'équation $y=x-\dfrac{1}{n}$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C}_n)$ représentative de f_n.

b) Préciser la position de $(\mathcal{C}_n)$ et D_n.

c) Tracer $(\mathcal{C}_1)$.

4°/a) Montrer que l'équation $(\star)$: $f_n(x)=1$ a une seule solution α_n dans $]0,+\infty[$.

b) Montrer que α_n est une solution de l'équation $x\ \ \ln x=\dfrac{1}{n}$.

5°/a) Montrer que $(\alpha_n)_{n\ge1}$ est une suite décroissante.

b) Montrer que $(\alpha_n)_{n\ge1}$ est convergente vers un réel que l'on calculera.

Exercice 10 :

A) 1°/ Prouver que $\forall t \geq 0$, $0 \leq 1 - t + \dfrac{t^2}{2} - e^{-t} \leq \dfrac{t^3}{6}$.

2°/ En déduire $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{1 - e^{-t} - t}{t^2}$.

3°/ Soit $g : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$: $t \mapsto \begin{cases} \dfrac{1 - e^{-t}}{t} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

a) Montrer que g est continue, dérivable sur $\mathbf{R}_+$.

b) Prouver que $\forall t \geq 0$, $1 + t \leq e^t$, en déduire le signe de $g'(t)$.

c) Etudier ainsi les variations de g et tracer sa courbe $(\mathscr{C}_g)$ représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

B) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$: $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x}(e^{-x} - e^{-2x}) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1°/ Prouver que f est continue sur $\mathbf{R}_+$.

2°/a) Prouver que $\forall x \geq 0$, $f(x) = 2g(2x) - g(x)$.

b) En déduire que f est dérivable sur $\mathbf{R}_+$.

c) Ecrire une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse $x_0 = 0$.

3°/a) Montrer que $\forall x > 0$, $f'(x) = \dfrac{e^{-2x}}{x^2}(2x + 1 - (x+1)e^x)$

b) En utilisant **A)** 3°/ b), prouver que $\forall x > 0$, $f'(x) < 0$.

4°/ Etudier f et tracer (C_f) dans un repère orthonormé.

Exercice 11 :

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$: $x \mapsto \ln(1 + e^{-x})$.

1°/ Etudier les variations de f.

2°/a) Montrer que la courbe (C) de f admet une asymptote oblique Δ.

b) Etudier la position de (C) et Δ.

c) Tracer (C) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3°/ Montrer que f est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et expliciter sa réciproque.

4°/ Soit $a \in \mathbf{R}^*$, M et N deux points de (C) d'abscisses respectives $-a$ et a.

a) Montrer que la droite (MN) garde une direction fixe que l'on précisera.

b) Montrer que les tangentes à (C) en M et N se coupent sur l'axe des ordonnées.

B) 1°/ Montrer que $\forall t \geq 0$, $t - \dfrac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$.

2°/ En déduire que $\forall x \in \mathbf{R}$, $e^{-x} - \dfrac{e^{-2x}}{2} \leq f(x) \leq e^{-x}$.

3°/ Soit la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ définie par : $U_1 = 1 + \dfrac{1}{e}$ et $\forall n \geq 1$,

$U_{n+1} = U_n(1 + \dfrac{1}{e^{n+1}})$

a) Prouver que $\forall n \geq 1, U_n > 0$.

b) Prouver que (U_n) est une suite croissante.

4°/ a) Prouver que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\ln(U_n) = \sum_{p=1}^{n} f(p)$.

b) Calculer en fonction de n les deux sommes $\sum_{p=1}^{n} \dfrac{1}{e^p}$ et $\sum_{p=1}^{n} \dfrac{1}{e^{2p}}$.

5°/ a) Montrer que $(U_n)_{n\geq 1}$ est une suite convergente. Soit l sa limite.

b) Prouver que $\dfrac{2e+1}{2(e^2-1)} \leq \ln l \leq \dfrac{1}{e-1}$.

Exercice 12 :

A) 1°/ Soit $u : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R} : x \mapsto e^x - x - 1$.

Etudier les variations de u. En déduire que $\forall x > 0$, $e^x \geq x + 1$.

2°/ Montrer que $\forall x > 0$, $\ln x \leq x - 1$. (On étudiera une fonction convenablement choisie).

3°/ En déduire que $\forall x > 0$, $e^{x} - \ln x \geq 2$.

B) Soit φ la fonction définie par : $\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{x}{e^{x} - \ln x} & \text{si} \quad x > 0 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$

1°/ Montrer que $D_{\varphi} = \mathbf{R}_{+}$.

2°/ Montrer que φ est continue, dérivable sur $\mathbf{R}_{+}$.

3°/ Soit $h : \mathbf{R}_{+}^{*} \to \mathbf{R} : \; x \mapsto e^{x}(1-x) - \operatorname{Log} x + 1$

a) Etudier les variations de h.

b) Montrer qu'il existe un seul réel $\alpha > 0$ solution de l'équation : (E) : $h(x) = 0$. Vérifier que $1 < \alpha < 2$.

c) En déduire le signe de $h(x)$.

4°/ Etudier ainsi les variations de φ.

Exercice 13 :

Soient $f(x) = x^{2}e^{2x}$ et $g(x) = (ax^{2} + bx + c)e^{2x}$.

1°/ Déterminer *a*, *b* et *c* pour que *g* soit une primitive de *f*.

2°/ En déduire la primitive *F* de *f* qui s'annule en 0.

Exercice 14 :

Soit *f* la fonction définie sur **R** par : $f(x) = \dfrac{e^{x} - 2}{e^{x} + 1}$

1°/ Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall x \in \mathbf{R}$, on a :

$$f(x) = a + \frac{be^{x}}{e^{x} + 1}$$

2°/ Calculer ainsi l'intégrale $I = \int_{0}^{\ln 2} f(x)\,dx$.

Exercice 15 :

Soit *F* définie sur $\mathbf{R}_{+}$ par : $F(x) = \int_{0}^{x} \sqrt{t}\,.e^{-t}\,dt$

(on ne demande pas le calcul de $F(x)$)

1°/ Montrer que F est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et calculer $F'(x)$.

2°/ Etudier le sens de variations de F.

3°/ a) Montrer que $\forall t \geq 0,\ \sqrt{t} \leq t + \frac{1}{4}$.

b) Calculer à l'aide d'une intégration par parties : $\int_0^x (t+\frac{1}{4}).e^{-t}\,dt$

c) En déduire que $\forall x \geq 0$, on a : $F(x) \leq \frac{5}{4}$.

Exercice 16 :

Soit la fonction $f(x) = \int_0^{\frac{e^x - e^{-x}}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2 - 1}}$.

1°/ Prouver que f est définie sur $\mathbf{R}$.

2°/ a) Prouver que f est dérivable sur $\mathbf{R}$.

b) Calculer pour chaque $x \in \mathbf{R}$, $f'(x)$.

3°/ En déduire $f(x)$.

4°/ Calculer $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-1}}$.

Exercice 17 :

1°/ En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :
$\forall x \in \mathbf{R},\ |\ e^x - 1\ | \leq |x|\, e^{|x|}$.

2°/ Soit $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\varphi(x) = \int_0^{\operatorname{tg} x} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$.

a) Montrer que φ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $\varphi'(x)$.

b) En déduire $\varphi(x)$.

3°/ Soit $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{F}(x) = \int_{-1}^1 \frac{e^{tx}}{t^2+1}\mathrm{d}t$.

a) Montrer que F est définie sur $\mathbf{R}$ et calculer F(0).

b) Montrer que $\forall x \in [-1, 1],\ \left|\ \mathrm{F}(x) - \frac{\pi}{2}\ \right| \leq |\ x\ |\ e\ \ln 2$.

c) En déduire que F est continue en 0.

Exercice 18 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x-1|.e^x$.

1°/ Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$. Interpréter graphiquement.

2°/ Etudier les variations de f et tracer sa courbe (C) dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}\ , \vec{j}\ )$.

3°/ Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites : $x = 0$ et $x = 2$.

Exercice 19 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = e^{\sqrt{x}} + 1$.

1°/a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter.

b) Etudier les variations de f.

2°/ Tracer la courbe (C) de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

3°/a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J que l'on précisera.

On note $g = f^{-1}$. Tracer la courbe (C′) de g dans le même repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

b) Montrer que $\forall x \in [2, +\infty[$, $g(x) = \ln^2(x-1)$.

4°/a) Calculer à l'aide de deux intégrations par parties l'intégrale

$$\mathrm{J} = \int_2^{e+1} g(x)\mathrm{d}x .$$

b) Que représente géométriquement J ?

5°/ Soit A l'aire de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 1$.

a) Montrer que $\mathrm{A} + \mathrm{J} = e + 1$.

b) En déduire A.

SOLUTIONS

Solution 1 :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\dfrac{e^{2x}-1}{2x}}{\dfrac{e^x-1}{x}}$

- $\lim\limits_{x\to 0}2\dfrac{e^{2x}-1}{2x}=\lim\limits_{X\to 0}2\dfrac{e^{X}-1}{X}=2\cdot 1=2 \quad (X=2x)$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ d'où $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{e^x-1}=2$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-2x^2}{x+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2(\frac{e^x}{x^2}-2)}{x(1+\frac{4}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(\frac{e^x}{x^2}-2)}{1+\frac{4}{x}}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{4}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{(\frac{x}{2})^2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{x}\right]^2$

$=\lim\limits_{X\to+\infty}(\dfrac{e^X}{2X})^2=+\infty \; (X=\dfrac{x}{2})$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-2x^2}{x+4}=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{e^X-1}{X}=1$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3e^{x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3e^xe^2=\lim\limits_{x\to-\infty}e^2x^3(e^{\frac{x}{3}})^3$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}e^2(xe^{\frac{x}{3}})^3=\lim\limits_{X\to-\infty}e^2(3Xe^X)^3=0$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^ne^x=\lim\limits_{x\to-\infty}x^n(e^{\frac{x}{n}})^n=\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^{\frac{x}{n}})^n$

$=\lim\limits_{X\to-\infty}(nXe^X)^n=\lim\limits_{X\to-\infty}n^n(Xe^X)^n=0 \quad (X=\dfrac{x}{n})$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{(x+1)^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{(x+1)^3} + \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{(x+1)^3}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{(x+1)^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} \dfrac{1}{(x+1)^3} = 0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{(x+1)^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{x^3(1+\frac{1}{x})^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{e^{\frac{x}{3}}}{x}\right)^3 \dfrac{1}{(1+\frac{1}{x})^3} = +\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{e^{\frac{x}{3}}}{x}\right) = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{3^3}\left(\dfrac{e^{X}}{X}\right)^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(1+\frac{1}{x})^3} = 1$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{(x+1)^3} = +\infty$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(e^{x}+1)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(e^{x}(1+e^{-x}))}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln e^{x}}{x} + \dfrac{\ln(1+e^{-x})}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} + \dfrac{\ln(1+e^{-x})}{x} = \lim\limits_{X\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{x}\cdot \ln(1+e^{-x}) = 1$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^{x}+1) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^{x}(1+e^{-x})) - x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^{x}) + \ln(1+e^{-x}) - x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x + \ln(1+e^{-x}) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} \ln(e^{x}+e^{-x}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\ln(e^{x}(1+e^{-2x}))$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(e^{x})}{x} + \dfrac{\ln(1+e^{-2x})}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{\ln(1+e^{-2x})}{e^{-2x}} \cdot \dfrac{1}{xe^{2x}}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+e^{-2x})}{e^{-2x}} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1 \quad (X = e^{-2x})$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{xe^{2x}} = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\ln(e^{x}+e^{-x}) = 1.$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1+\frac{1}{x})^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(e^{x\ln(1+\frac{1}{x})})$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} x \quad \ln(1+\frac{1}{x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{X \to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1 \quad (X = \frac{1}{x})$$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = \lim\limits_{t \to 1} e^t = e^1 = e \quad (t = x\ln(1+\frac{1}{x}))$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} (1+\frac{1}{x})^x = \ln e = 1$

k) Posons $X = e^x$. Lorsque $x \to +\infty$, $X \to +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} \ln(1+e^x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{e^x} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln(1+X)}{X}$

$$= \lim_{X \to +\infty} \frac{\ln X(1+\frac{1}{X})}{X} = \lim_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} + \frac{\ln(1+\frac{1}{X})}{X}$$

$$= \lim_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} + \frac{1}{X}\ln(1+\frac{1}{X}) = 0 + 0 \cdot 0 = 0$$

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(xe^{\frac{x}{x^2-1}} - x) = ?$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x(e^{\frac{x}{x^2-1}} - 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2-1} \dfrac{e^{\frac{x}{x^2-1}} - 1}{\frac{x}{x^2-1}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2-1} = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\frac{x}{x^2-1}} - 1}{\frac{x}{x^2-1}} = \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{e^X - 1}{X} = 1 \quad (X = \dfrac{x}{x^2-1})$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(xe^{\frac{x}{x^2-1}} - x) = \lim\limits_{t \to 1} \ln t = 0 \quad (t = xe^{\frac{x}{x^2-1}} - x)$.

Solution 2 :

1°/ • Montrons que $\forall x \in [0,1]$, $1+x+\dfrac{x^2}{2} \le e^x$

Soit $h(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2} - x - 1$

h est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1]$, $h'(x) = e^x - x - 1$

h' est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1]$, $h''(x) = e^x - 1 \ge 0$

x	0		1
$h''(x)$		$+$	
$h'(x)$	0	$\nearrow$ $(+)$	
$h(x)$	0	$\nearrow$ $(+)$	

D'après le tableau des variations de g, on a :

$\forall x \in [0,1]$, $h(x) \ge 0$ d'où $\forall x \in [0,1]$, $1+x+\dfrac{x^2}{2} \le e^x$

• Montrons que $\forall x \in [0,1]$, $e^x \le 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$

Pour cela considérons la fonction $k(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}$

$k'(x) = e^x - 1 - x - x^2$; $k''(x) = e^x - 1 - 2x$; $k^{(3)}(x) = e^x - 2$

on a : $e^x - 2 \ge 0 \Leftrightarrow e^x \ge 2 \Leftrightarrow x \ge \ln 2$

x	0		$\ln 2$		1
$k^{(3)}(x)$		$-$	0	$+$	
$k''(x)$	0	$\searrow$	$(-)$	$\nearrow$	$e-3$
$k'(x)$	0	$\searrow$ $(-)$			
$k(x)$	0	$\searrow$ $(-)$			

d'après le tableau des variations de k on a :

$\forall x\in[0,1]$, $k(x)\leq 0$ d'où $\forall x\in[0,1]$, $e^x\leq 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

Conclusion : $\forall x\in[0,1]$, $1+x+\frac{x^2}{2}\leq e^x\leq 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

2°/ • ***Continuité de f à droite en 0*** :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{e^x-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}}=1 \text{ car } \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=1$$

donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1=f(0)$ et par suite f est continue à droite en 0.

• ***Dérivabilité de f à droite en 0*** :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{e^x-1}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-e^x+1}{x(e^x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-(e^x-x-1)}{x^2}\cdot\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}}$$

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=1$. Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-(e^x-x-1)}{x^2}$

D'après 1°/, $\forall x\in[0,1]$, $1+x+\frac{x^2}{2}\leq e^x\leq 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2}\leq e^x-x-1\leq\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\Rightarrow -\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\leq-\frac{e^x-1-x}{x^2}\leq-\frac{1}{2}$$

$\lim\limits_{x\to 0}-\frac{x}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$ d'où $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-(e^x-x-1)}{x^2}=-\frac{1}{2}$ et par suite

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-\frac{1}{2}$.

Conclusion : f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=-\frac{1}{2}$.

3°/ g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $\forall x\in[0,+\infty[$,

$g'(x)=e^x-e^x(x+1)=-xe^x\leq 0$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	0 $\searrow$

donc d'après le tableau des variations de g , on a : $\forall x \in [0,+\infty[$, $g(x) \leq 0$.

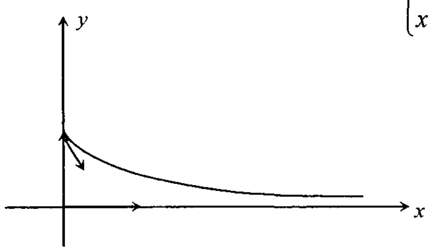
4°/ f est définie, continue et dérivable sur $[0,+\infty[$;

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2} = \frac{g(x)}{(e^x-1)^2} < 0$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	1 $\searrow$	0

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}} = 0 \text{ car } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

• C_f admet une demi tangente T au point $x_0 = 0$, $T : \begin{cases} y = \frac{-1}{2}x + 1 \\ x > 0 \end{cases}$



Solution 3 :

1°/• $\forall x \in \mathbf{R}$, $e^x + e^{-x} > 0$ d'où $e^x + e^{-x} \neq 0$ pour tout réel donc $D_f = \mathbf{R}$
.

• $$-1 - f(x) = -1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{-e^{-x} - e^{-x} - e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{-2e^x}{e^x + e^{-x}} < 0$$

d'où $\forall x \in \mathbf{R}$, $-1 < f(x)$.

• $$f(x) - 1 = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - 1 = \frac{e^x - e^{-x} - e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{-2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < 0$$

d'où $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) < 1$

Conclusion : $\forall x \in \mathbf{R}$, $-1 < f(x) < 1$.

2°/ a) • $x \mapsto e^x - e^{-x}$ est dérivable sur **R** comme somme de fonctions dérivables.

• $x \mapsto e^x + e^{-x}$ est dérivable sur **R** comme somme de fonctions dérivables d'où f est dérivable sur **R** comme quotient de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbf{R}\,,\ f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = 1 - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = 1 - (f(x))^2$$

b) On a : $-1 < f(x) < 1 \Rightarrow 0 \le f^2(x) < 1 \Rightarrow 1 - f^2(x) > 0$

d'où $\forall x \in \mathbf{R}\,,\ f'(x) > 0$.

3°/ f est continue, dérivable sur **R** et $\forall x \in \mathbf{R}\,,\ f'(x) = 1 - f^2(x) > 0$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

4°/ • f est continue, strictement croissante sur **R** donc f est une bijection de **R** sur $f(\mathbf{R}) =]-1,1[$.

• $f^{-1} :]-1\,,1[\to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto f^{-1}(x) = y$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x \Leftrightarrow \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} = x \Leftrightarrow$$

$$e^{2y} - 1 = xe^{2y} + x \Leftrightarrow e^{2y}(1-x) = x+1 \Leftrightarrow e^{2y} = \frac{x+1}{1-x} \Leftrightarrow 2y = \mathrm{Log}(\frac{x+1}{1-x})$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\mathrm{Log}(\frac{x+1}{1-x})$$

d'où $\forall x \in\ ]-1\,,1[\,,\ f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\ln(\dfrac{x+1}{1-x})$.

5°/ a) T : $y = f'(0)\cdot x + f(0)$

or $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1 - f^2(0) = 1$ d'où $\mathrm{T} : y = x$.

b) $h(x) = f(x) - x$

h est dérivable sur $\mathbf{R}$; $h'(x) = f'(x) - 1 = 1 - f^2(x) - 1 = -f^2(x) \leq 0$

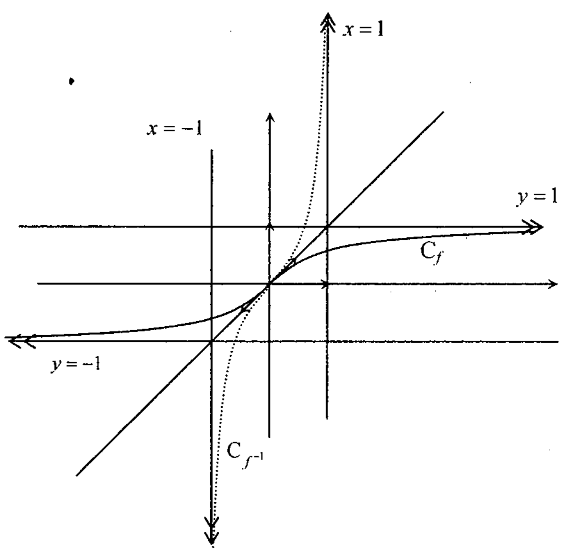
x		0	
$h'(x)$	$-$	0	$-$
$h(x)$	$(+)$	0	$(-)$

d'où C_f est au dessus de (T) sur $]-\infty, 0]$

C_f est au dessous de (T) sur $[0, +\infty[$

C_f coupe (T) en un seul point $O(0, 0)$

6°/



- $y = 1$ et $y = -1$ sont des asymptotes horizontales à C_f.
- C_f^{-1} est le symétrique de C_f par rapport à la première bissectrice

$y = x$.

Solution 4 :

A) 1°/ h est continue, dérivable sur $\mathbf{R}$.

$\forall x \in \mathbf{R},\ h'(x) = e^x - 1$

- $h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln 1 = 0$

- $h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > \ln 1 = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	

- $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x - x - 1 = +\infty$ (car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$)

- $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}) = +\infty$ (car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2°/ D'après le tableau de variations de h on a : $h(\mathbf{R}) = \mathbf{R}_+$ d'où $\forall x \in \mathbf{R}$, $h(x) \geq 0$ et par conséquent $\forall x \in \mathbf{R}$, $e^x \geq x + 1$.

B) 1°/ • $x \mapsto e^x - 1$ est continue sur $\mathbf{R}$

• $x \mapsto x \cdot e^{2x}$ est continue sur $\mathbf{R}$

d'où g est continue sur $\mathbf{R}_+^*$ (quotient de deux fonctions continues)

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{e^{2x}} = 1 = g(0)$$

d'où g est continue en $x_0 = 0$.

Conclusion : g est continue sur $\mathbf{R}_+$.

2°/ $e^{-2x} - g(x) = e^{-2x} - \dfrac{e^x - 1}{x \cdot e^{2x}} = \dfrac{e^{-2x}(xe^{2x}) - (e^x - 1)}{xe^{2x}} = \dfrac{x - e^x + 1}{xe^{2x}} = \dfrac{-h(x)}{xe^{2x}}$

or $\forall x > 0$, $xe^{2x} > 0$ et $h(x) > 0$ d'où $\forall x > 0$ on a : $e^{-2x} - g(x) < 0$.

Conclusion : $\forall x > 0$, $e^{-2x} < g(x)$.

3°/a) $\forall x > 0$, $g'(x) = \dfrac{e^x(xe^{2x}) - (e^x - 1)(e^{2x} + 2xe^{2x})}{(xe^{2x})^2}$

$$=\frac{xe^{3x}-e^{2x}(1+2x)(e^x-1)}{x^2e^{4x}}=\frac{e^{2x}[xe^x-(1+2x)(e^x-1)]}{x^2e^{4x}}$$

$$=\frac{xe^x-e^x+1-2xe^x+2x}{x^2e^{2x}}=\frac{-xe^x-e^x+1+2x}{x^2e^{2x}}=\frac{1+2x-e^x(1+x)}{x^2e^{2x}}$$

b) $g'(x)+e^{-2x}=\dfrac{1+2x-e^x(1+x)}{x^2e^{2x}}+e^{-2x}$

$$=\frac{1+2x-e^x(1+x)+x^2e^{2x}e^{-2x}}{x^2e^{2x}}$$

$$=\frac{(x+1)^2-e^x(x+1)}{x^2e^{2x}}=\frac{(x+1)(x+1-e^x)}{x^2e^{2x}}=\frac{-(x+1)\,h(x)}{x^2e^{2x}}$$

or $\forall x>0,\ x+1>0$ et $h(x)>0$ d'où $\forall x>0,\ g'(x)<-e^{-2x}$.

4°/a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x(1-e^{-x})}{xe^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^{-x}}{xe^x}$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-e^{-x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x=+\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

b) On a : $\forall x>0,\ g'(x)<-e^{-2x}<0$ (car $\forall x\in\mathbf{R},\ e^{-2x}>0$)

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	1	$\searrow$	0

5°/ g est continue, strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$ donc g est une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $g(\mathbf{R}_+)=]0,1]$.

Solution 5 :

1°/ • $x\le 0 \Rightarrow -x\ge 0 \Rightarrow 1-x\ge 1$

d'où $\ln(1-x)$ est définie pour $x\le 0$.

• $xe^{\frac{-1}{x}}$ est définie pour tout $x>0$ d'où $D_f=\mathbf{R}$.

2°/• $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} xe^{\frac{-1}{x}}=0$ (car $\lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{-1}{x}}=\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$)

• $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\ln(1-x)=\ln 1=0$

D'où : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ d'où f est continue en $x_0 = 0$.

3°/a) • $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{xe^{\frac{-1}{x}}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{-1}{x}} = 0$

• $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\ln(1-x)}{x} = \lim\limits_{X\to 0^+} \dfrac{\ln(1+X)}{-X} = -1$

(Soit $X = -x$, lorsque x tend vers 0 , X tend vers 0^+)
d'où f n'est pas dérivable en 0 et en plus $f'_d(0) = 0$ et $f'_g(0) = -1$

b) C_f admet au point O(0,0) deux demi-tangentes :

$T_1 : \begin{cases} y = f'_g(0)\cdot(x-0) + f(0) \\ x \le 0 \end{cases} \Rightarrow T_1 : \begin{cases} y = -x \\ x \le 0 \end{cases}$

$T_2 : \begin{cases} y = f'_d(0)\cdot(x-0) + f(0) \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow T_2 : \begin{cases} y = 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$

4°/a) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{-1}{x}} = e^0 = 1$

• $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to +\infty} xe^{\frac{-1}{x}} - x = \lim\limits_{x\to +\infty} x(e^{\frac{-1}{x}} - 1)$ on pose $X = \dfrac{-1}{x}$

$$= \lim_{X\to 0^-} \frac{-(e^X - 1)}{X} = -1$$

d'où D : $y = x - 1$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln 1 - x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln(1-x)}{(1-x)} \cdot \dfrac{(1-x)}{x} = 0$

(car $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln(1-x)}{1-x} = \lim\limits_{t\to +\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0$)

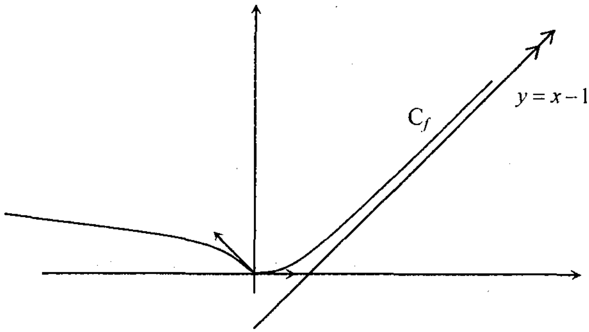
d'où C_f admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction $(x'Ox)$.

5°/a) • $\forall x > 0$, $f'(x) = e^{\frac{-1}{x}} + x\cdot(\dfrac{1}{x^2})\, e^{\frac{-1}{x}} = (1 + \dfrac{1}{x})e^{\frac{-1}{x}} > 0$

- $\forall x < 0$, $f'(x) = \dfrac{-1}{1-x} < 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b)



Solution 6 :

1°/• La fonction $x \to \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$ est continue sur $\mathbf{R}^*$ comme composée et quotient des fonctions continues sur $\mathbf{R}^*$.

- ***Continuité de f en* 0** :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{-\frac{1}{3x^2}}}{x}\right)^3 = \lim_{x\to 0} \left(-3x \cdot \left(\frac{-1}{3x^2}\right) \cdot e^{-\frac{1}{3x^2}}\right)^3$$

$$= \lim_{x\to 0} (-3x)^3 \left(\left(\frac{-1}{3x^2}\right) \cdot e^{-\frac{1}{3x^2}}\right)^3$$

- $\lim\limits_{x\to 0} (-3x)^3 = 0$

- $\lim\limits_{x\to 0} \left(\left(\dfrac{-1}{3x^2}\right) \cdot e^{-\frac{1}{3x^2}}\right)^3 = \lim\limits_{X\to -\infty} (X e^X)^3 = 0$

$\left(X = \dfrac{-1}{3x^2}\right.$; si $x \to 0$ alors $\left. X \to -\infty \right)$

d'où $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ et par suite f est continue en 0.

Conclusion : f est continue sur **R**.

2°/• La fonction $x \to \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ comme composée et quotient des fonctions dérivables sur $\mathbf{R}^*$.

• ***Dérivabilité de f en* 0** :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{-\frac{1}{4x^2}}}{x}\right)^4$$

$$= \lim_{x\to 0}(-4x)^4\left(-\frac{1}{4x^2}\cdot e^{-\frac{1}{4x^2}}\right)^4 = 0$$

car $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{1}{4x^2}\cdot e^{-\frac{1}{4x^2}} = \lim\limits_{X\to -\infty}(Xe^X) = 0$ et par suite f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Conclusion : f est dérivable sur **R** .

3°/ On remarque que f est une fonction impaire, il suffit de faire l'étude sur $[0,+\infty[$

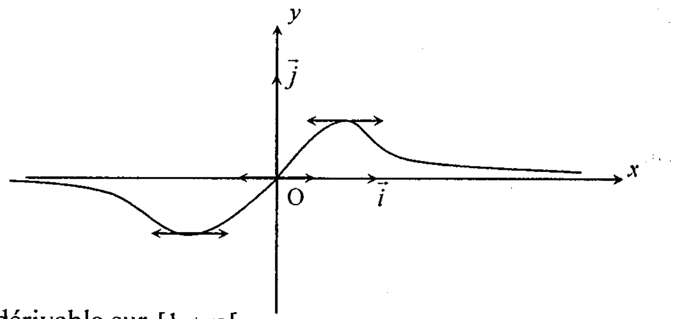
$$\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \frac{\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}x^3 - 3x^2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^6} = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}(2-3x^2)}{x^6}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $2-3x^2$.

x	0		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	0

$M = f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

• $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x^3}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$



4°/ a) F est dérivable sur $[1,+\infty[$

$\forall x \in [1,+\infty[\,,\ F'(x) = \dfrac{1}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = f(x)$

• Soit $x \geq 1$; F est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$ donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, x+1[$ tel que :

$$F'(c) = \frac{F(x+1)-F(x)}{x+1-x} = F(x+1)-F(x) \Rightarrow f(c) = F(x+1)-F(x)$$

d'autre part on a : $x < c < x+1 \Rightarrow f(x+1) < f(c) < f(x)$ car f est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$

d'où $f(x+1) \leq F(x+1)-F(x) \leq f(x)$

b) Pour tout entier $k \geq 1$ on a : d'après (*)
$f(k+1) \leq F(k+1)-F(k) \leq f(k)$

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \sum_{k=1}^{n} F(k+1) - \sum_{k=1}^{n} F(k) \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)\ ;$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) = f(2) + f(3) + \cdots + f(n+1) = \sum_{k=2}^{n+1} f(k)$$

d'où $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leq \sum_{k=2}^{n+1} F(k) - \sum_{k=1}^{n} F(k) \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$

Or $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} F(k) - \sum_{k=1}^{n} F(k) = F(n+1) + \sum_{k=2}^{n} F(k) - F(1) - \sum_{k=2}^{n} F(k)$

$$= \mathrm{F}(n+1) - \mathrm{F}(1) = \frac{e^{-\frac{1}{(n+1)^2}} - e^{-1}}{2}$$

d'où $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leq \frac{e^{\frac{-1}{(n+1)^2}} - e^{-1}}{2} \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbf{N}^*$ $\displaystyle\frac{e^{\frac{-1}{(n+1)^2}} - e^{-1}}{2} \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \Rightarrow \frac{e^{\frac{-1}{(n+1)^2}} - e^{-1}}{2n} \leq \mathrm{U}_n$

• Montrons que $\forall n \in \mathbf{N}^*$: $\mathrm{U}_n \leq \dfrac{e^{\frac{-1}{n^2}} - e^{-1}}{2n}$

On a : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leq \frac{e^{\frac{-1}{(n+1)^2}} - e^{-1}}{2} \Rightarrow$

$\displaystyle\sum_{k=2}^{n} f(k) + f(n+1) \leq \frac{e^{\frac{-1}{(n+1)^2}} + e^{-1}}{2}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \frac{e^{\frac{-1}{n^2}} - e^{-1}}{2}$ car $f(n+1) > 0$

$\Rightarrow f(1) + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \frac{e^{\frac{-1}{n^2}} - e^{-1}}{2} + f(1)$

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \frac{e^{\frac{-1}{n^2}} - e^{-1}}{2} + e^{-1} \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \frac{e^{\frac{-1}{n^2}} + e^{-1}}{2n}$

d'où $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\mathrm{U}_n \leq \dfrac{e^{\frac{-1}{n^2}} + e^{-1}}{2n}$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\dfrac{e^{\frac{-1}{(n+1)^2}} - e^{-1}}{2n} \leq \mathrm{U}_n \leq \dfrac{e^{\frac{-1}{n^2}} + e^{-1}}{2n}$.

• On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{-1}{(n+1)^2}} - e^{-1}}{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n}\left(e^{\frac{-1}{(n+1)^2}} - e^{-1}\right) = 0$

car $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{-1}{(n+1)^2}} = e^0 = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$

de même $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{-1}{n^2}} - e^{-1}}{2n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

Conclusion : La suite (U_n) converge vers 0.

Solution 7 :

1°/ a) f est définie, continue et dérivable sur $[0,1]$

$\forall x \in [0,1]$, $f'(x) = \dfrac{e^x(x+2) - e^x}{(x+2)^2} = \dfrac{e^x(x+1)}{(x+2)^2} > 0$

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{e}{3}$

b) f' est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1]$,

$$f''(x) = \frac{(x+2)^2 e^x(x+2) - 2(x+2)e^x(x+1)}{(x+2)^4}$$

$$= \frac{e^x(x^2+2x+2)}{(x+2)^3} > 0 \text{ pour tout } x \in [0,1]$$

donc f' est strictement croissante sur $[0,1]$ et par suite

$\forall x \in [0,1]$, $0 \le x \le 1 \Rightarrow f'(0) \le f'(x) \le f'(1)$

$f'(0) = \dfrac{1}{4}$ et $f'(1) = \dfrac{2e}{9} < \dfrac{2}{3}$

Conclusion : $\forall x \in [0,1]$, $\dfrac{1}{4} \le f'(x) \le \dfrac{2}{3}$

2°/ $g(x)=f(x)-x$. Etudions les variations de g.

g est dérivable sur $[0,1]$, $\forall x\in[0,1]$, $g'(x)=f'(x)-1$

or $\forall x\in[0,1]$, $f'(x)\leq\frac{2}{3}\Rightarrow f'(x)-1\leq-\frac{1}{3}$ donc

$\forall x\in[0,1]$, $g'(x)<0$.

g est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$ donc g est une bijection de $[0,1]$ sur $g([0,1])=[g(1),g(0)]=[\frac{e}{3}-1,\frac{1}{2}]$ d'où 0 admet un seul antécédent $a\in[0,1]$ par g.

Conclusion : L'équation $f(x)=x$ admet une seule solution $a\in[0,1]$.

3°/a) Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbf{N}$, $0\leq U_n\leq 1$

• pour $n=0$, $U_0=\frac{1}{2}\Rightarrow 0\leq U_0\leq 1$

• supposons que pour un entier donné n, $0\leq U_n\leq 1$ et montrons que $0\leq U_{n+1}\leq 1$. On a : $0\leq U_n\leq 1\Rightarrow f(0)\leq f(U_n)\leq f(1)$ car f est strictement croissante sur $[0,1]$.

$f(0)=\frac{1}{2}>0$ et $f(U_n)=U_{n+1}$ et $f(1)=\frac{e}{3}<1$ d'où $0\leq U_{n+1}\leq 1$.

Conclusion : $\forall n\in\mathbf{N}$, $0\leq U_n\leq 1$.

b) $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } [0,1] \\ \forall x\in[0,1], |f'(x)|\leq\frac{2}{3} \\ \forall n\in\mathbf{N}, U_n\in[0,1] \text{ et } a\in[0,1] \end{cases}$

donc d'après le théorème des inégalités des accroissements finis :

$\forall n\in\mathbf{N}$, $|f(U_n)-f(a)|\leq\frac{2}{3}|U_n-a|$

or $f(U_n)=U_{n+1}$ et $f(a)=a\Rightarrow |U_{n+1}-a|\leq\frac{2}{3}|U_n-a|$

c) On a : $|U_1-a|\leq\frac{2}{3}|U_0-a|$

$$|U_2-a|\leq\frac{2}{3}|U_1-a|\leq(\frac{2}{3})^2|U_0-a|$$

$$|U_3 - a| \leq \frac{2}{3}|U_2 - a| \leq (\frac{2}{3})^3|U_0 - a|$$

On constate alors que pour $n \in \mathbf{N}$, $|U_n - a| \leq (\frac{2}{3})^n|U_0 - a|$

Montrons ce résultat par récurrence :

- pour $n = 0$, $|U_0 - a| \leq (\frac{2}{3})^0|U_0 - a|$

- supposons que pour un entier n donné , $|U_n - a| \leq (\frac{2}{3})^n|U_0 - a|$ et

montrons que $|U_{n+1} - a| \leq (\frac{2}{3})^{n+1}|U_0 - a|$

On a : $|U_{n+1} - a| \leq \frac{2}{3}|U_n - a| \leq (\frac{2}{3})(\frac{2}{3})^n|U_0 - a| \leq (\frac{2}{3})^{n+1}|U_0 - a|$

D'où $\forall n \in \mathbf{N}$, $|U_n - a| \leq (\frac{2}{3})^n|U_0 - a|$ et comme $-1 < \frac{2}{3} < 1$ alors

$\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{2}{3})^n|U_0 - a| = 0$ ce qui prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = a$.

d) On a : $\forall n \in \mathbf{N}$, $|U_n - a| \leq (\frac{2}{3})^n|U_0 - a| \leq (\frac{2}{3})^n$

car $|U_0 - a| = \left|\frac{1}{2} - a\right| < 1$ ($a \in [0,1]$) donc il suffit de trouver le plus petit

entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $(\frac{2}{3})^n \leq 10^{-3}$

$(\frac{2}{3})^n \leq 10^{-3} \Rightarrow \ln(\frac{2}{3})^n \leq \ln(10^{-3}) \Rightarrow n\ln(\frac{2}{3}) \leq \ln(10^{-3})$

$\Rightarrow n \geq \dfrac{\ln(10^{-3})}{\ln(\frac{2}{3})}$ (car $\ln(\frac{2}{3}) < 0$) d'où $n_0 = E(\dfrac{\ln(10^{-3})}{\ln(\frac{2}{3})}) \quad +1 = 18$.

Solution 8 :

A) 1°/ a) Pour tout entier $n \geq 2$, f_n est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$.

$\forall x \in \mathbf{R},\ f_n'(x) = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}e^{\frac{x}{n}}$

$$f_n'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1}\geq \frac{1}{n}e^{\frac{x}{n}} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1}\geq e^{\frac{x}{n}} \Leftrightarrow \ln(\frac{n}{n+1})\geq \frac{x}{n} \Leftrightarrow n\ \ln\frac{n}{n+1}\geq x$$

x	$-\infty$		x_n		$n\ \ln\frac{n}{n+1}$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$			0			$-$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	M_n	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\frac{x}{n+1}+e^{\frac{x}{n}}=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{x}{n}}=0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{x}{n+1}-e^{\frac{x}{n}}=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{x}{n}(\frac{n}{n+1}-\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}})=-\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{n}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^{X}}{X}=+\infty$ $\quad(X=\frac{x}{n})$

b) D'après le tableau des variations de f_n, $M_n=f_n(n\ \ln(\frac{n}{n+1}))$ est un maximum de f_n.

$$f_n(n\ \ln\frac{n}{n+1}))=1+\frac{n}{n+1}\ \ln\frac{n}{n+1}-e^{\ln\frac{n}{n+1}}$$

$$=1+\frac{n}{n+1}\ln(\frac{n}{n+1})-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}+\frac{n}{n+1}\ln\frac{n}{n+1}$$

$$=\frac{n}{n+1}(\frac{1}{n}+\ln\frac{n}{n+1}))$$

Montrons que $\forall n\geq 2$, $\frac{1}{n}+\ln\frac{n}{n+1}>0$. Soit $h(x)=\frac{1}{x}+\ln\frac{x}{x+1}$

$$h'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x(x+1)}=\frac{-1}{x^2(x+1)}<0$$

x	2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$		$\searrow$	0

d'après le tableau des variations de h, $\forall x \in [2,+\infty[$, $h(x) > 0$

d'où $\forall n \geq 2$, $\frac{1}{n} + \ln\frac{n}{n+1} > 0$ et par suite $f_n(n \ \ \ln(\frac{n}{n+1})) > 0$.

2°/a) On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) - (1 + \frac{x}{n+1}) = \lim\limits_{x \to -\infty} -e^{\frac{x}{n}} = 0$ donc la droite

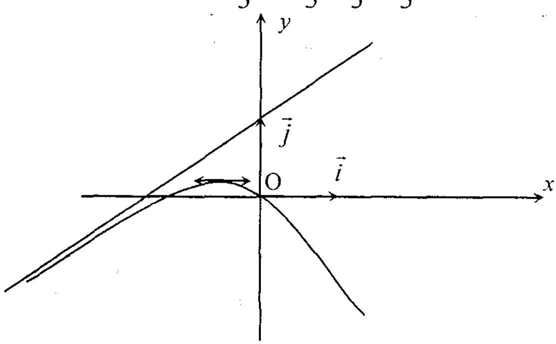
$D_n : y = \frac{1}{n+1}x + 1$ est une asymptote oblique à C_{f_n} au voisinage de $-\infty$.

b) On a $D_2 : y = \frac{1}{3}x + 1$ est une asymptote oblique à C_2 au voisinage de $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + \frac{1}{3} - \frac{e^{\frac{x}{2}}}{x} = -\infty$$

donc la droite (yy') est une direction asymptotique à C_2 au voisinage de $+\infty$

Le maximum de f_2 est $f_2(2 \ln(\frac{2}{3})) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\ln\frac{2}{3}$



3°/a) f_n est continue et strictement croissante sur

$]-\infty \ , \ n \ \ \ln\frac{n}{n+1}]$ donc f_n réalise une bijection de

$]-\infty \ , \ n \ \ \ln\frac{n}{n+1}]$ sur $]-\infty \ , \ f_n(\ n\ln\frac{n}{n+1}\ )]$

Or $f_n(n \ln\frac{1}{n+1}) > 0$

donc 0 admet un seul antécédent $x_n \in \ ]-\infty \ , \ n\ln\frac{n}{n+1}]$ par f_n .

Montrons que l'équation $f_n(x)=0$ n'admet pas de solution sur

$[\ n\ln\dfrac{n}{n+1}\ ,\ 0\ [$.

On a pour tout $x\in[\ n\ln\dfrac{n}{n+1}\ ,\ 0\ [$, $n\ln(\dfrac{n}{n+1})\leq x<0 \Rightarrow$

$f_n(0)<f_n(x)\leq f_n(n\ \ln(\dfrac{n}{n+1}))$ car f_n est strictement décroissante sur

$[\ \ln\dfrac{n}{n+1}\ ,\ 0\ ]$. Or $f_n(0)=0$ donc $f_n(x)>0$.

Conclusion : L'équation $f_n(x)=0$ admet une seule solution x_n dans $]-\infty\,,0[$.

B) 1°/ φ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\forall x\in\ ]1,+\infty[$, on a :

$$\varphi'(x)=\frac{-2}{x^2}+\frac{2}{x^2-1}=\frac{2}{x^2(x^2-1)}>0$$

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\varphi'(x)$	$+$
$\varphi(x)$	$\nearrow$ 0

d'après le tableau des variations de φ, on a : $\forall x>1$, $\phi(x)<0$.

2°/a) $f_n(-2)=\dfrac{n-1}{n+1}-e^{\frac{-2}{n}}$

On a : $\forall n\geq 2$, $\varphi(n)<0 \Rightarrow \dfrac{2}{n}+\ \ln\dfrac{n-1}{n+1}<0 \Rightarrow\ \ln\dfrac{n-1}{n+1}<\dfrac{-2}{n}$

$\Rightarrow \dfrac{n-1}{n+1}<e^{\frac{-2}{n}} \Rightarrow \dfrac{n-1}{n+1}-e^{\frac{-2}{n}}<0 \Rightarrow f_n(-2)<0$.

b) On a d'après le tableau des variations de f_n

x		x_n		0		$+\infty$
$f_n(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	

$\begin{cases} f_n(x)<0 \\ x<0 \end{cases} \Leftrightarrow x<x_n$ et comme $f_n(-2)<0$ donc $-2<x_n$.

2°/ $y'' + 6y = 0 \Leftrightarrow y'' + \sqrt{6}^2\ y = 0$

d'où : $y = a\cos(\sqrt{6}\,x) + b\sin(\sqrt{6}\,x)$ $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

3°/ $y''' + 2y' = 0$

on pose : $y' = Z$

on a : $Z'' + 2Z = 0 \Leftrightarrow Z'' + \sqrt{2}^2\ Z = 0$

d'où : $Z = a\cos(\sqrt{2}\,x) + b\sin(\sqrt{2}\,x)$

d'où : $y' = a\cos(\sqrt{2}\,x) + b\sin(\sqrt{2}\,x)$

et par suite $y = \dfrac{a}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}\,x) - \dfrac{b}{\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}\,x) + C$;$a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

Solution 12 :

1°/ $y_0'' + 9y_0 = 0 + x = x$ D'où y_0 est solution de (E)

2°/y est solution de (E) ssi

$y'' + 9y = x \Leftrightarrow y'' + 9y = y_0' + 9y_0 \Leftrightarrow (y - y_0)'' + 9(y - y_0) = 0$

$\Leftrightarrow$ $(y - y_0)$ est solution de (*) : $y'' + 9y = 0$

3°/$y'' + 9y = 0 \Leftrightarrow y'' + 3^2 y = 0$

d'où $y = a\cos(3x) + b\sin(3x)$ $(a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$

les solutions de (E) :

$y - y_0$ est solution de (*) donc $y - \dfrac{x}{9} = a\cos 3x + b\sin 3x$

et par suite $y = \dfrac{x}{9} + a\cos 3x + b\sin 3x$ $(a,b \in \mathbb{R})$

Solution 13 :

(E) : $y'' + 4y = 8e^{2x}$

1°/ f_0 solution de (E) si et seulement si $f_0'' + 4f_0 = 8e^{2x}$

On a : $f_0'(x) = 2ae^{2x}$

$f_0''(x) = 4ae^{2x}$

On obtient : $4ae^{2x} + 4ae^{2x} = 8e^{2x}$

D'où : $8a = 8$ et par suite $a = 1$

Conclusion : $f_0(x) = e^{2x}$

2°/y solution de (E) ssi

$y'' + 4y = 8e^{2x} \Leftrightarrow y'' + 4y = f_0' + 4f_0 \Leftrightarrow (y'' - f_0') + 4(y - f_0) = 0$

$\Leftrightarrow (y - f_0)'' + 4(y - f_0) = 0$

$\Leftrightarrow y - f_0$ est solution de (*) : $y'' + 4y = 0$

3°/ $y'' + 4y = 0 \Leftrightarrow y'' + 2^2 y = 0$

a) $y = \lambda \cos(2x) + \beta \sin(2x) \qquad \lambda, \beta \in \mathbb{R}$

b) $y - f_0$ est solution de (*)

d'où $y - e^{2x} = \lambda \cos 2x + \beta \sin(2x)$

d'où : $y = e^{2x} + \lambda \cos 2x + \beta \sin 2x$ où $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$

PROBLEMES

Problème 1 :

Soit $f(x) = \dfrac{1+e^x}{1+e^{2x}}$

1°/ a) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$.

b) Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}$ on a : $0 < f(x) \leq \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

2°/ Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}$; $(1+e^{2x})f'(x)+(e^{2x}-1)f(x) = -1$

3°/ Pour tout x de $\mathbf{R}$ on pose : $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1+e^t}{1+e^{2t}}dt$

a) Etablir que pour tout réel x on a :

$$F(x) = \int_0^{e^x} \frac{dt}{1+t^2} + Log\left[\frac{\sqrt{2}e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right]$$

b) Soit $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{tgx} \frac{dt}{1+t^2}$

Montrer que $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$; $\varphi(x) = x$

c) En déduire que $I = \displaystyle\int_0^{\frac{Log3}{2}} f(t)dt = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}Log(\frac{3}{2})$ donner une interprétation géométrique de la valeur de I.

4°/ On donne l'intégrale suivante : $J = \displaystyle\int_0^{\frac{Log3}{2}} \frac{1+e^t}{(1+e^{2t})^2}dt$

a) Montrer qu'il existe deux réels a et b telle que pour tout réel t

on a : $\dfrac{1}{1+e^{2t}} = a + \dfrac{be^{2t}}{1+e^{2t}}$, en déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{Log3}{2}} \frac{1+e^t}{(1+e^{2t})^2}dt$

b) Montrer que $\forall t \in \mathbf{R}$; $f'(t) = \dfrac{-1}{1+e^{2t}} - f(t) + \dfrac{2f(t)}{1+e^{2t}}$

trouver alors J.

Problème 2 :(BAC)

A - Soit f la fonction numérique à variable réelle définie sur **R** par

$f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$ et soit ( ) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$.

1°/ a) Etudier les variations de f.

b) Montrer que la courbe ( ) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées. Tracer la courbe ( ).

2°/ a) Montrer que f est une bijection de **R** sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Soit g la fonction réciproque de f et soit (') sa courbe représentative dans le repère $(0,\vec{i},\vec{j})$.

Montrer que $g(x) = \dfrac{1}{2} Log(\dfrac{x^2}{1-x^2})$ pour tout x élément de J et tracer ( ).

B - 1°/ Soit φ la fonction numérique définie sur **R** par $\varphi(x) = f(x) - x$. Etudier les variations de φ et montrer qu'il existe un réel unique α tel que $\varphi(\alpha) = 0$ et $Log2 < \alpha < 1$

2°/ On pose $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha} Log\dfrac{x^2}{1-x^2}dx$

a) En utilisant une intégration par parties, calculer I.

on remarquera que $\dfrac{2}{1-x^2} = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}$

b) En déduire en fonction de α l'aire de la partie (K) du plan limitée par les courbes ( ) et ( ) et les deux axes.

3°/ On définie la suite (U_n) par

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \quad \text{pour tout entier naturel n} \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq U_n < \alpha$

b) Etudier le sens de variation de la suite (U_n). En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

c) On définie la suite (V_n) par $V_n = \dfrac{1}{\alpha - U_n}\displaystyle\int_{U_n}^{\alpha} f(x)dx$ pour tout entier naturel n. Montrer que $U_{n+1} \leq V_n \leq \alpha$ pour tout entier naturel n.

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$

C - Soit F la fonction définie sur $]-1,1[$ par :

$$\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}Log\frac{x^2}{1-x^2}} f(t)dt & \text{si } x \neq 0 \\ F(0) = -Log(1+\sqrt{2}) \end{cases}$$

1°/ a) Etudier la parité de F.

b) Montrer que F est dérivable sur $]0,1[$ et calculer $F'(x)$.

2°/ a) Calculer $F(\frac{\sqrt{2}}{2})$. En déduire l'expression de $F(x)$ sur $]0,1[$.

b) La fonction F est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ?

c) Tracer, dans un autre repère orthonormé, la courbe (Γ) représentative de la fonction F.

3°/ Calculer $F(\alpha)$ et retrouver alors l'aire de la partie (K) du plan.

Problème 3 :(BAC)

A - Soit l'application définie sur **R** par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{x + Logx}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1°/ a) Montrer que f est continue sur **R**

b) Etudier la dérivabilité de f au point 1.

2°/ a)Etudier les variations de l'application f et tracer sa courbe représentative ( ) dans un plan P rapporté a un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$.

b) Calculer l'aire du domaine limité par la courbe ( ) et les droites respectives $y = 1$, $x = 1$ et $x = e$.

3°/ Soit φ la fonction définie sur **R** par : $\varphi(x) = \displaystyle\int_1^x tf(t)dt$

a) Ecrire l'expression de $\varphi(x)$ en fonction de x ($x \in R$)

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.

c) Etudier les variations de la fonction φ et tracer sa courbe représentative ( ) dans un autre repère orthonormé du plan P.

B - Soit n un entier naturel non nul et g_n la fonction définie sur **R** par :

$g_n(t) = t^n \sin t$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} tg_n(t)dt$

1°/ Justifier l'existence de I_n .

2°/En intégrant par partie,calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,dt$ puis en déduire la valeur de I_1

3°/ Montrer que, pour tout entier naturel non nul n on a :

$$I_{n+1} + (n+1)(n+3)I_n = (n+3)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2}$$

4°/ En déduire la valeur de I_3.

C - Soit h une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et ψ la fonction définie sur **R**

par : $\begin{cases} \psi(x) = \dfrac{2}{x}\displaystyle\int_0^x th(t)dt & \text{si } x \neq 0 \\ \psi(0) = h(0) \end{cases}$

1°/ On suppose qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout réel x et pour tout réel t variant entre 0 et x, on a : $|h(t)| \leq M$

a) Montrer que, pour tout réel x non nul, on a : $\left|\displaystyle\int_0^x th(t)dt\right| \leq M\dfrac{x^2}{2}$

b) En déduire que, si $h(0) = 0$, alors la fonction ψ est continue en 0

2°/a) Expliciter, pour tout réel x la fonction ψ dans le cas où $h(t) = \sin^2 t$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2 + 1 - 2x\sin 2x - \cos 2x}{4x}$

Problème 4 : (BAC)

A - 1°/ Soit la fonction φ définie sur **R** par $\varphi(x) = e^x(2-x) - 2$

a) Etudier les variations de φ.

b) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet dans **R** exactement deux solutions . On notera a la solution non nulle et vérifiera que $1 < a < 2$.

c) En déduire le signe de $\varphi(x)$.

2°/ Soit f la fonction définie sur **R** par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue sur **R**

b) Montrer que f est dérivable sur **R** et que :

Pour tout x $\in \mathbb{R}^*$ on a : $f'(x) = \dfrac{x\varphi(x)}{(e^x - 1)^2}$

c) Montrer que $f(a) = a(2-a)$

d) Etudier les variations de f, construire la courbe représentative de f dans un plan rapporté a un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$ (pour la construction on prendra $a = 1.6$)

3°/ On considère la fonction F définie sur R_+ par : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

a) Justifier l'existence de $F(x)$ pour tout réel positif x .

b) Montrer que F est continue et strictement croissant sur l'intervalle $I = [0,+\infty[$.

c) Donner la forme de l'intervalle $F(I)$.

4°/ On considère la fonction G définie sur $\mathbf{R}_+$ par : $G(x) = \int_{Log2}^x t^2 e^{-t} dt$

a) Justifier l'existence de $G(x)$ pour tout réel positif x .

b) A l'aide de deux intégrations par partie, calculer $G(x)$ puis montrer que G admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera .

c) Montrer que : pour tout $t \in [Log2,+\infty[$ on a : $f(t) \leq 2t^2 e^{-t}$

et en déduire qu'il existe un réel positif M tel que pour tout $x \in R_+$, on a : $F(x) \leq M$.

d) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) \leq M$

(dans la suite de problème en prendra $L = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$)

B - Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

1°/ a) Montrer que pour tout réel positif x, on a :

$$\frac{1}{e^x - 1} = e^{-x} + e^{-2x} + \dots\dots\dots\dots + e^{-nx} + \frac{e^{-nx}}{e^x - 1}$$

b) Montrer que pour tout réel positif x on a :

$$0 \leq \int_0^x f(t)e^{-nt} dt \leq \frac{a(2-a)}{n}$$

c) x étant un réel positif, calculer $I_n(x) = \int_0^x t^2 e^{-nt} dt$

d) Montrer que $I_n(x)$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$.

2°/ a) Montrer que pour tout réel positif x on a :

$$\sum_{k=1}^{n} I_K(x) = F(x) - \int_0^x f(t)e^{-nt} dt$$

En déduire que la fonction H_n définie sur $\mathbf{R}_+$ par :

$H_n(x) = \int_0^x f(t)e^{-nt}\,dt$ admet une limite l_n, lorsque x tend vers $+\infty$, vérifiant

$L - l_n = 2\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\dots\dots+\frac{1}{n^3}\right)$

b) En utilisant le résultat établi à la question B-1°/ b), montrer que la suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

c) Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $U_n = 1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\dots\dots+\frac{1}{n^3}$

Montrer que cette suite converge et a pour limite le réel L' tel que $L = 2L'$.

SOLUTIONS

Solution 1 :

1°/ f est définie, continue et dérivable sur **R** et $\forall x \in \mathbf{R}$;

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^{2x}) - 2e^{2x}(1+e^x)}{(1+e^{2x})^2} = \frac{e^x(-e^{2x} - 2e^x + 1)}{(1+e^{2x})^2}$$

le signe de $f'(x)$ est celui de $-e^{2x} - 2e^x + 1$

on a : $-e^{2x} - 2e^x + 1 = -(e^{2x} + 2e^x + 1) + 2 = 2 - (e^x + 1)^2$.

$2 - (e^x + 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq (e^x + 1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{2} \geq e^x + 1 \Leftrightarrow e^x \leq \sqrt{2} - 1$

$\Leftrightarrow x \leq Log(\sqrt{2} - 1)$ d'où le tableau des variations de f

x	$-\infty$		$Log(\sqrt{2}-1)$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}+1}{2}$	$\searrow$	0

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1+e^x}{1+e^{2x}} = 1$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+e^x}{1+e^{2x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x(\frac{1}{e^x}+1)}{e^x(\frac{1}{e^x}+e^x)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{e^x}+1}{\frac{1}{e^x}+e^x} = 0$

b) d'après le tableau des variations de f on a :

$\forall x \in \mathbf{R}$; $0 < f(x) \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}$

2°/ $\forall x \in \mathbf{R}$; $(1+e^{2x})f'(x) + (e^{2x} - 1)f(x)$

$$= \frac{e^x(-e^{2x} - 2e^x + 1)}{1+e^{2x}} + (e^{2x} - 1).\frac{1+e^x}{1+e^{2x}}$$

$$= \frac{-e^{3x} - 2e^{2x} + e^{x} + e^{3x} + e^{2x} - 1 - e^{x}}{1 + e^{2x}} = \frac{-e^{x} - 1}{1 + e^{2x}} = -1$$

3°/ a) Soit $K(x) = \displaystyle\int_0^{e^x} \frac{dt}{1+t^2}$ et $g(x) = Log\left[\dfrac{\sqrt{2}e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right]$

donc $h(x) = F(x) - K(x) - g(x)$

* F est dérivable sur **R** car f est continue sur **R** et $\forall x \in \mathbf{R}$;

$$F'(x) = f(x) = \frac{1+e^x}{1+e^{2x}}$$

* g est dérivable sur **R** ; et $\forall x \in \mathbf{R}$; $g'(x) = \left(\dfrac{\sqrt{2}e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right)' . \dfrac{\sqrt{1+e^{2x}}}{\sqrt{2}e^x}$

$$= \frac{\sqrt{2}e^x}{(1+e^{2x})\sqrt{1+e^{2x}}} . \frac{\sqrt{1+e^{2x}}}{\sqrt{2}e^x} = \frac{1}{1+e^{2x}}$$

* $K(x) = L(e^x)$ où $L(x) = \displaystyle\int_0^{x} \frac{dt}{1+t^2}$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur **R** donc L est dérivable sur **R**

et $L'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et la fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur **R** donc K est dérivable sur **R** comme composée de deux fonctions dérivables et $\forall x \in \mathbf{R}$

; $K'(x) = e^x L'(e^x) = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$ ce qui donne que h est dérivable sur **R**

et $\forall x \in \mathbf{R}$; $h'(x) = F'(x) - K'(x) - g'(x) = \dfrac{1+e^x}{1+e^{2x}} - \dfrac{e^x}{1+e^{2x}} - \dfrac{1}{1+e^{2x}} = 0$

donc h est une fonction constante.

Or on a $h(0) = F(0) - K(0) - g(0) = 0$ d'où $\forall x \in \mathbf{R}$; $h(x) = 0$

et par suite $\forall x \in \mathbf{R}$ on a :

$$F(x) = \int_0^{e^x} \frac{dt}{1+t^2} + Log\left(\frac{\sqrt{2}e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right)$$

b) Soit $v(x) = \displaystyle\int_0^{x} \frac{dt}{1+t^2}$

v est dérivable sur **R** car la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\boldsymbol{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$

; $v'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$\varphi(x) = v(tgx)$, la fonction tg est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ donc φ est

dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$;

$\varphi'(x) = (1 + tg^2 x)v'(tgx) = \dfrac{1+tg^2 x}{1+tg^2 x} = 1$ d'où

$\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$; $\varphi(x) = x + c$ or on a

$\varphi(0) = \displaystyle\int_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = 0$ d'où c = 0 et par suite $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$; $\varphi(x) = x$

c) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{Log3}{2}} f(t)dt = F(\frac{Log3}{2})$ or d'après 3°/ a)

$$F(\frac{Log3}{2}) = \int_0^{\frac{Log3}{2}} \frac{dt}{1+t^2} + Log(\frac{\sqrt{2}e^{\frac{Log3}{2}}}{\sqrt{1+e^{Log3}}}) = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} + Log(\frac{\sqrt{6}}{2})$$

$$= \int_1^0 \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} + \frac{1}{2}Log(\frac{3}{2})$$

$$= -\int_0^{tg\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{tg\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{1+t^2} + \frac{1}{2}Log(\frac{3}{2})$$

$$= -\varphi(\frac{\pi}{4}) + \varphi(\frac{\pi}{3}) + \frac{1}{2}Log(\frac{3}{2})$$

I est la mesure en unité d'aire de l'aire de la partie du plan limité par la courbe de f, et les droite d'équations respectives :

$y = 0$; $x = 0$ et $x = \dfrac{Log3}{2}$

4°/ a) $\forall t \in \mathbf{R}$; $\dfrac{1}{1+e^{2t}} = \dfrac{1+e^{2t}-e^{2t}}{1+e^{2t}} = 1 - \dfrac{e^{2t}}{1+e^{2t}}$ donc $a = 1$ et $b = -1$

$$\int_0^{\frac{Log3}{2}} \frac{dt}{1+e^{2t}} = \int_0^{\frac{Log3}{2}} (1-\frac{e^{2t}}{1+e^{2t}})dt = \int_0^{Log\sqrt{3}} (1-\frac{1}{2}\frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}})dt$$

$$=\left[t-\frac{1}{2}Log(1+e^{2t})\right]_0^{\log\sqrt{3}} = Log\sqrt{3}-\frac{1}{2}Log4+\frac{1}{2}Log2$$

$$= Log\sqrt{3}-\frac{1}{2}Log2=\frac{1}{2}Log(\frac{3}{2})$$

b) d'après 2°/ on a : $\forall t \in \mathbf{R}$; $(1+e^{2t})f'(t)+(e^{2t}-1)f(t)=-1$

$$\Rightarrow f'(t)=-\frac{1}{1+e^{2t}}-\frac{e^{2t}-1}{1+e^{2t}}f(t) = -\frac{1}{1+e^{2t}}-\frac{(e^{2t}+1)-2}{1+e^{2t}}.f(t)$$

$$=\frac{-1}{1+e^{2t}}-f(t)+\frac{2f(t)}{1+e^{2t}} \;;\; J=\int_0^{\frac{Log3}{2}} \frac{1+e^{t}}{(1+e^{2t})^2}dt=\int_0^{\frac{Log3}{2}} \frac{f(t)}{1+e^{2t}}dt$$

or on a montré que $\forall t \in \mathbf{R}$; $f'(t)=-\frac{1}{1+e^{2t}}-f(t)+\frac{2f(t)}{1+e^{2t}}$

d'où $\frac{f(t)}{1+e^{2t}}=\frac{1}{2}\left[f'(t)+\frac{1}{1+e^{2t}}+f(t)\right]$ d'où

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{Log3}{2}} f'(t)dt+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{Log3}{2}} \frac{1}{1+e^{2t}}dt+\int_0^{\frac{Log3}{2}} f(t)dt$$

$$=\frac{1}{2}[f(t)]_0^{Log\sqrt{3}}+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}Log\frac{3}{2})+\frac{1}{2}I$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1+\sqrt{3}}{1+(\sqrt{3})^2}-1)+\frac{1}{4}Log(\frac{3}{2})+\frac{\pi}{24}+\frac{1}{4}Log(\frac{3}{2})$$

$$=\frac{\sqrt{3}-3}{8}+\frac{\pi}{24}+\frac{1}{2}Log(\frac{3}{2})$$

Solution 2 :

A - 1°/ a) $\forall x \in \mathbf{R}$: $1+e^{2x}>0$ donc f est définie, continue et dérivable sur **R**

$$\text{et } \forall x \in \mathbf{R} \,;\; f'(x)=\frac{e^{x}\sqrt{1+e^{2x}}-\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}e^{x}}{1+e^{2x}}$$

$$=\frac{e^{x}(1+e^{2x})-e^{3x}}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}=\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}>0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}=0$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{e^{x}\sqrt{1+\dfrac{1}{e^{2x}}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{e^{2x}}}}=1$

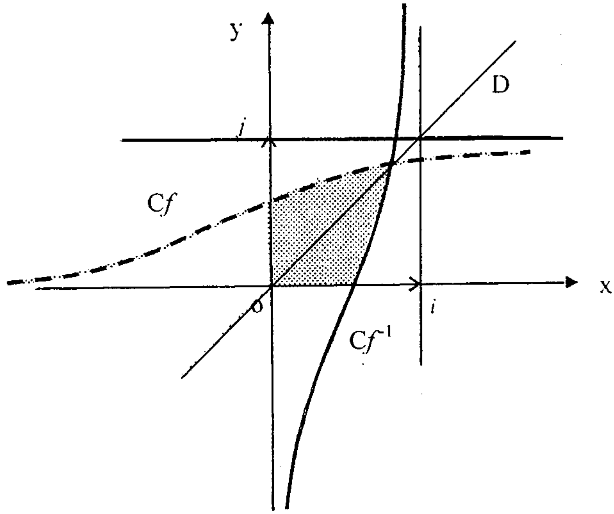
b) f' est dérivable sur **R** et $\forall x \in \mathbf{R}$;

$$f''(x)=\frac{e^{x}(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{2}(1+e^{2x})^{\frac{1}{2}}.2e^{2x}e^{x}}{(1+e^{2x})^{3}}=\frac{e^{x}(1-2e^{2x})}{(1+e^{2x})^{\frac{5}{2}}}$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 1-2e^{2x}=0 \Leftrightarrow e^{2x}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x=Log\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}Log2$$

$f''(x)$ s'annule en $x_0=-\dfrac{1}{2}Log2$ en changeant de signe ce qui prouve que le point $I(-\dfrac{1}{2}Log2, f(-\dfrac{1}{2}Log2))$ est un point d'inflexion de ( ).Or

$f(-\dfrac{1}{2}Log2)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ donc $I\ (-\dfrac{1}{2}Log2, \dfrac{\sqrt{3}}{3})$ est un point d'inflexion de ( ).



3°/ a) f est continue et strictement croissante sur **R** donc f est une bijection de **R** sur $f(\mathbf{R}) =]0,1[= J$

b) $g :]0,1[\to \mathbf{R} : \quad x \mapsto y = g(x)$

$$y = g(x) \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \frac{e^y}{\sqrt{1+e^{2y}}} = x \Leftrightarrow e^{2y} = x^2(1+e^{2y})$$

$$\Leftrightarrow e^{2y}(1-x^2) = x^2 \text{ or } \forall x \in]0,1[\Rightarrow 1-x^2 \neq 0 \text{ d'où } e^{2y} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow 2y = Log\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) \Rightarrow y = \frac{1}{2} Log\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) \text{ d'où } \forall x \in \mathbf{R} \text{ ;}$$

$$g(x) = \frac{1}{2} Log \frac{x^2}{1+x^2}$$

$\mathscr{C}' = S_\Delta(\mathscr{C})$ où S_Δ est la symétrie orthogonale d'axe $\Delta : y = x$

B - 1°/ $\varphi(x) = f(x) - x$

φ est dérivable sur **R** et $\forall x \in \mathbf{R}$; $\varphi'(x) = f'(x) - 1 = \dfrac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}} - 1$

φ' est dérivable sur **R** et $\varphi''(x) = f''(x) = \dfrac{e^{x}(1-2e^{2x})}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}Log2$		$+\infty$
$\varphi''(x)$		+	0	-	
$\varphi'(x)$	-1	$\nearrow$	a (-)	$\searrow$	

$$a = \varphi'\left(-\frac{1}{2}Log2\right) = \frac{e^{-\frac{1}{2}Log2}}{(1+e^{-Log2})^{\frac{3}{2}}} - 1 = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} - 1 = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} - 1 < 0$$

d'où $\forall x \in \mathbf{R}\ ;\ \varphi'(x) < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$\varphi'(x)$			$-$		
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

φ est continue et strictement décroissante sur **R** donc φ est une bijection de **R** sur **R** donc 0 admet un seul antécédent α par φ ce qui donne que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une seule solution α

* d'autre part on a :

$\varphi(Log2) = \dfrac{2}{\sqrt{5}} - Log2 > 0$ et $\varphi(1) = \dfrac{e}{\sqrt{1+e^{2}}} - 1 < 0$ donc

$\varphi(Log2).\varphi(1) < 0$ et φ est continue sur $[Log2, 1]$ d'où d'après le théorème des valeurs intérmediaires : $Log2 < \alpha < 1$

2°/ a) $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha} Log\frac{x^{2}}{1-x^{2}}\,dx$

Posons $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = Log\dfrac{x^2}{1-x^2} \end{cases}$ et $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \dfrac{2}{x(1-x^2)} \end{cases}$

$$I = \frac{1}{2}\left[xLog\frac{x^2}{1-x^2}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha} - \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha}\frac{2}{1-x^2}dx$$

Calculons $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha}\frac{2}{1-x^2}dx$ on a : $\frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$

d'où $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha}\frac{2}{1-x^2}dx = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha}(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x})dx$

$$= \left[-\log(1-x) + \log(1+x)\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha} = \left[Log(\frac{1+x}{1-x})\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha}$$

$$= Log(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}) - Log(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}})$$

donc $I = \frac{1}{2}\alpha Log\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} - \frac{1}{2}Log(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}) + Log(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}})$

$$= \frac{1}{2}\alpha Log\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} - \frac{1}{2}Log(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}) + Log(1+\sqrt{2})$$

$= \alpha^2 - \frac{1}{2}Log(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}) + Log(1+\sqrt{2})$ car $f(\alpha) = \alpha \Rightarrow g(\alpha) = \alpha$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}Log\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} = \alpha$$

b) Soit $A(\alpha,0)$; $B(\alpha,\alpha)$;$C(0,\alpha)$ le quadrilatère $OABC$ est un carré d'aire dont une mesure est α^2 d'autre part ( ) coupe (xx') au point d'abscisse $\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $I = \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha}Log\frac{x^2}{1-x^2}dx = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha}g(x)dx$ est l'aire de la partie du plan limitée

par ( ), l'axe (xx') et la droite d'équation $x = \alpha$ et comme S_Δ conserve les mesures d'aire alors $\alpha^2 = 2I + A(k) \Rightarrow A(k) = \alpha^2 - 2I$ d'où

$A(k) = Log(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}) - 2Log(1+\sqrt{2}) - \alpha^2$

3°/ a) Montrons par récurrence que $\forall n \in N$; $0 \le U_n < \alpha$

*pour $n = 0$, $U_0 = 0 \Rightarrow 0 \le U_0 < \alpha$

*Supposons que pour un entier donné n ; $0 \le U_n < \alpha$ et montrons que $0 \le U_{n+1} < \alpha$

on a : $\begin{cases} 0 \le U_n < \alpha \\ f \text{ est strictement croissant sur R} \end{cases}$ donc $f(0) \le f(U_n) < f(\alpha)$

or $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$; $f(U_n) = U_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$ d'où $0 \le U_{n+1} < \alpha$

Conclusion : $\forall n \in \mathbf{N}$; $0 \le U_n < \alpha$

b) $\forall n \in \mathbf{N}$; $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n = \varphi(U_n)$; d'après le tableau des variations de φ (**B**-1°/) on a : $\forall x \in \left]-\infty, \alpha\right[$: $\varphi(x) > 0$ et comme $\forall n \in \mathbf{N}$; on a $0 \le U_n < \alpha$ donc $\forall n \in \mathbf{N}$; $\varphi(U_n) > 0$ ce qui prouve que la suite (U_n) est croissante.

* La suite (U_n) est croissante et majorée par α donc la suite (U_n) est convergente vers un réel l.

D'autre part, f est continue sur **R**, en particulier en l donc $f(l) = l \Rightarrow \varphi(l) = 0$ or l'équation $\varphi(x) = 0$ admet α comme seule solution d'où $l = \alpha$

c) Pour tout entier naturel n,

$U_n \le x \le \alpha \Rightarrow f(U_n) \le f(x) \le f(\alpha)$ car f est croissante sur **R** d'où $\forall n \in \mathbf{N}$; si $x \in [U_n, \alpha]$ alors $U_{n+1} \le f(x) \le \alpha$ (car $U_{n+1} = f(U_n)$ et $f(\alpha) = \alpha$)

En intégrant sur $[U_n, \alpha]$ on obtient :

$$\int_{U_n}^{\alpha} U_{n+1}\,dx \le \int_{U_n}^{\alpha} f(x)dx \le \int_{U_n}^{\alpha} \alpha dx \Rightarrow U_{n+1}[x]_{U_n}^{\alpha} \le \int_{U_n}^{\alpha} f(x)dx \le \alpha[x]_{U_n}^{\alpha}$$

$$\Rightarrow U_{n+1}(\alpha - U_n) \le \int_{U_n}^{\alpha} f(x)dx \le \alpha(\alpha - U_n)$$ or $\forall n \in \mathbf{N}$; $U_n < \alpha$

donc $U_{n+1} \le \frac{1}{\alpha - U_n} \int_{U_n}^{\alpha} f(x)dx \le \alpha$

Conclusion : $\forall n \in \mathbf{N}$; $U_{n+1} \leq V_n \leq \alpha$

*On a $\forall n \in \mathbf{N}$; $U_{n+1} \leq V_n \leq \alpha$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} U_n = \alpha$ donc

$\lim\limits_{x \to +\infty} V_n = \alpha$

C - 1°/ a) $\forall x \in \mathbf{R}^*$: $F(-x) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}Log\frac{x^2}{1-x^2}} f(t)dt = F(x)$

donc $\forall x \in \mathbf{R}$ $(-x) \in \mathbf{R}$ et $F(-x) = F(x)$ d'où F est une fonction paire

b) * La fonction f est continue sur $\mathbf{R}$ donc la fonction

G : x a $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$; $G'(x) = f(x)$

* d'autre part la fonction $g : x$ a $g(x) = \dfrac{1}{2} Log \dfrac{x^2}{1-x^2}$ est dérivable

sur $]0,1[$ donc F est dérivable sur $]0,1[$ comme composée de deux fonctions dérivables car $F = G \circ g$.

$\forall x \in]0,1[: F''(x) = g'(x).G'(g(x))$ or $g'(x) = \dfrac{1}{x(1-x^2)}$

d'où $F''(x) = \dfrac{1}{x(1-x^2)} f \circ g(x)$ or $g = f^{-1}$ donc $f \circ g(x) = x$ et par

suite $\forall x \in]0,1[: F(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

2°/ a) $F(\dfrac{\sqrt{2}}{2}) = \displaystyle\int_0^0 f(t)dt = 0$

on a $\forall x \in]0,1[: F'(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)}$ or $\dfrac{1}{(1-x^2)} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x})$

d'où $\forall x \in]0,1[: F(x) = \dfrac{1}{2}(-Log(1-x) + \log(1+x)) + c$

$\Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{2} Log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) + c$ or $F(\dfrac{\sqrt{2}}{2}) = 0$ donc $c = -\dfrac{1}{2} Log(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}})$ d'où

$\forall x \in]0,1[: F(x) = \dfrac{1}{2} Log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - \dfrac{1}{2} Log(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}})$

$$=\frac{1}{2}Log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-Log\sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})^2}{2}}=\frac{1}{2}Log(\frac{1+x}{1-x})-Log(1+\sqrt{2})$$

b) * $\lim\limits_{x\to 0} F(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}Log\frac{1+x}{1-x}-Log(1+\sqrt{2})=-Log(1+\sqrt{2})$

donc $\lim\limits_{x\to 0} F(x)=F(0)$ et par suite F est continue en 0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}Log(\frac{1+x}{1-x})}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{Log(1+x)}{x}-\frac{1}{2}\frac{Log(1-x)}{x}=1 \text{ car}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{Log(1+x)}{x}=\frac{1}{2} \text{ et } \lim_{x\to 0}-\frac{1}{2}\frac{Log(1-x)}{x}=\lim_{X\to 0}\frac{1}{2}\frac{Log(1+X)}{X}=\frac{1}{2}$$

donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=1$ ce qui entraîne que F est dérivable en 0

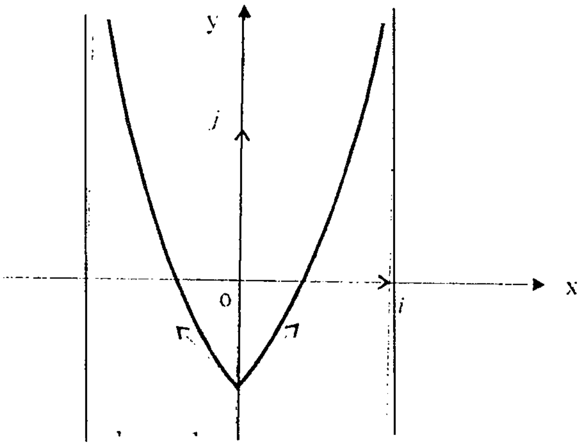
et $F'(0)=1$.

c)

x	0		1
$F'(x)$		$+$	‖
$F(x)$	$-Log(1+\sqrt{2})$	↗	$+\infty$ ‖

* on a $F'(0)=1 \Rightarrow$ La courbe Γ de F admet une tangente au point d'abscisse 0, d'équation $y=x-Log(1+\sqrt{2})$

* d'autre part F est paire donc l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de (Γ)



3°/ * $F(\alpha)=\frac{1}{2}Log(\frac{1+\alpha}{1-\alpha})-Log(1+\sqrt{2})$

* $A(k)=\int_0^{\alpha}f(t)dt-\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha}g(t)dt$ or $f(\alpha)=\alpha \Rightarrow g(\alpha)=\alpha$

$\Rightarrow \frac{1}{2}Log\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}=\alpha$ d'où $F(\alpha)=\int_0^{\alpha}f(t)dt$

et $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha}g(t)dt=\frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha}\log\frac{x^2}{1-x^2}dx=I$. Il en résulte que $A(k)=F(\alpha)-I$

$=\frac{1}{2}Log(\frac{1+\alpha}{1-\alpha})-Log(1+\sqrt{2})-\alpha^2+\frac{1}{2}Log(\frac{1+\alpha}{1-\alpha})-\log(1+\sqrt{2})$

$Log(\frac{1+\alpha}{1-\alpha})-2Log(1+\sqrt{2})-\alpha^2=$

Solution 3 :

A - 1°/ a) La fonction $x\mapsto\frac{x+Logx}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ en particulier sur $]1,+\infty[$.

* La fonction $x\mapsto 1$ est continue sur **R** et en particulier sur $]-\infty,1[$

<u>Continuité en 1</u> .

$\lim_{x\to 1^-}f(x)=1=f(1)$; $\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+Logx}{x}=1=f(1)$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$ donc f est continue en 1.

Conclusion : f est continue sur **R**.

b) * $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\dfrac{x+\log x}{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{Logx}{x(x-1)}$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x}\dfrac{Logx - Log1}{x-1} = 1.1 = 1$ car $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{Logx - Log1}{x-1} = Log'(1) = 1$

donc f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 0 \Rightarrow f'_g(1) = 0$ on a : $f'_d(1) \neq f'_g(1)$

donc f n'est pas dérivable en 1.

2°/ a) f est dérivable sur $\mathbf{R}\setminus\{1\}$.

* $\forall x \in \left]-\infty, 1\right[: f(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = 0$

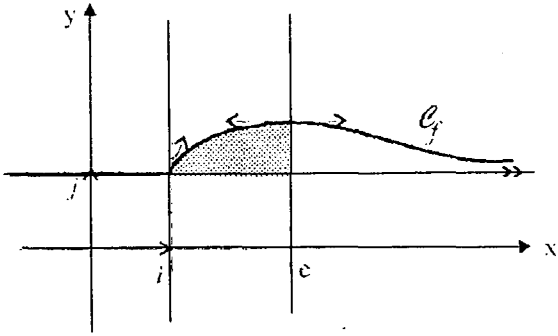
* $\forall x \in \left]1, +\infty\right[: f(x) = \dfrac{x+Logx}{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(1+\frac{1}{x})x - x - Logx}{x^2}$

$f'(x) = \dfrac{1-Logx}{x^2}$ d'où $f'(x) = \begin{cases} 0 & si\ x<1 \\ \dfrac{1-Logx}{x^2} & si\ x>1 \end{cases}$

Le signe de $f'(x)$ sur $\left]1, +\infty\right[$ est celui de $1\text{-}Logx$; $1 - Logx \geq 0 \Leftrightarrow x \leq e$

x	$-\infty$		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		0	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\longrightarrow$	1	$\nearrow$	$\dfrac{1+e}{e}$	$\searrow$	1

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+Logx}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} 1 + \dfrac{Logx}{x} = 1$ car $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{Logx}{x} = 0$



l'équation de la demi-tangente en 1 est $\begin{cases} y = x \\ x \geq 1 \end{cases}$

b) $A = \int_1^e (f(x) - 1)dx \ \ (U.A)$

$$\int_1^e (f(x)-1)dx = \int_1^e \frac{Logx}{x}dx = \int_1^e \frac{1}{x}.Logx dx$$

$$= \left[\frac{Log^2 x}{2}\right]_1^e = \frac{1}{2}Log^2 e = \frac{1}{2} \text{ d'où } A = \frac{1}{2} \ \ \text{(U.A)}$$

3°/ a) $\varphi(x) = \int_1^x tf(t)dt$

* pour tout $x \in \left]-\infty, 1\right] : \varphi(x) = \int_1^x tdt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^x = \frac{x^2-1}{2}$

* pour tout $x \in \left]1, +\infty\right[: \varphi(x) = \int_1^x (t + Logt)dt = \int_1^x tdt + \int_1^x Logtdt$

* $\int_1^x tdt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^x = \frac{x^2-1}{2}$

* Intégrons par parties : $\int_1^x Logtdt$

Posons $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = Logt \end{cases}$ et $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$

d'où $\int_1^x Logtdt = [tLogt]_1^x - [t]_1^x = xLogx - x + 1$

d'où $\varphi(x)=\dfrac{x^2-1}{2}+xLogx-x+1=xLogx+\dfrac{x^2}{2}-x+\dfrac{1}{2}$

Conclusion : $\varphi(x)=\begin{cases} xLogx+\dfrac{x^2}{2}-x+\dfrac{1}{2} & si \quad x>1 \\ \dfrac{x^2-1}{2} & si \quad x\leq 1 \end{cases}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} xLogx+\dfrac{x^2}{2}-x+\dfrac{1}{2}$

$$=\lim_{x\to+\infty} x(Logx+\frac{x}{2}-1)+\frac{1}{2}=+\infty$$

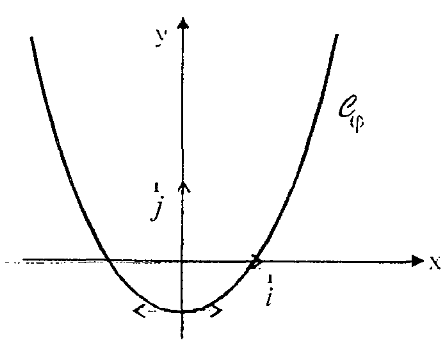
c) La fonction t a $tf(t)$ est continue sur **R** donc φ est dérivable sur **R** et $\forall x\in\mathbf{R}$: $\varphi'(x)=xf(x)$ or $\forall x\in\mathbf{R}$: $f(x)>0$ donc le signe de $\varphi'(x)$ est celui de x.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	0	+	
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{-1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Etude des branches infinies :

on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\varphi(x)}{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varphi(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} Logx+\dfrac{x}{2}-1+\dfrac{1}{2x}=+\infty$

donc l'axe des ordonnés est une asymptote à la courbe de φ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.



B - 1°: La fonction $t \mapsto tg_n(t)$ est continue sur R donc elle admet au moins une primitive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ce qui prouve que I_n existe

2°/ Posons $\begin{cases} u'(t) = \cos t \\ v(t) = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t) = \sin t \\ v'(t) = 1 \end{cases}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t dt = [t\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = \frac{\pi}{2} + [\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin t dt$ faisons une intégration par parties :

Posons $\begin{cases} u'(t) = \sin t \\ v(t) = t^2 \end{cases}$ et $\begin{cases} u(t) = -\cos t \\ v'(t) = 2t \end{cases}$

d'où $I_1 = \left[-t^2 \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t dt \Rightarrow I_1 = \pi - 2$

3°/ Soit $n \in \mathbf{N}$; $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n+3} \sin t dt$

Posons $\begin{cases} u'(t) = \sin t \\ v(t) = t^{n+3} \end{cases}$ et $\begin{cases} u(t) = -\cos t \\ v'(t) = (n+3)t^{n+2} \end{cases}$

d'où $I_{n+2} = \left[-t^{n+3} \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+3)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n+2} \cos t dt$

$$= (n+3)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n+2} \cos t dt$$

Posons $\begin{cases} u'(t) = \cos t \\ v(t) = t^{n+2} \end{cases}$ et $\begin{cases} u(t) = \sin t \\ v'(t) = (n+2)t^{n+1} \end{cases}$

donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n+2} \cos t dt = \left[t^{n+2} \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - (n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n+1} \sin t dt$

$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2} - (n+2)I_n$. Il en résulte que :

$I_{n+2} = (n+3)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2} - (n+2)(n+3)I_n$ d'où

$$I_{n+2}+(n+2)(n+3)I_n=(n+3)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2}$$

4°/ D'après la relation précédente on a :
pour $n=1$;

$$I_3+12I_1=4\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \Rightarrow I_3=\frac{\pi^3}{2}-12(\pi-2)=\frac{\pi^3}{2}-12\pi+24$$

C- 1°/ a) * Pour $x>0$: $\left|\int_0^x th(t)dt\right| \leq \int_0^x |th(t)|dt$

Or $\forall t\in[0,x]$: $|h(t)|\leq M$ et $|t|=t$ donc $\forall t\in[0,x]$: $|th(t)|\leq Mt$

En intégrant sur $[0,x]$ on obtient : $\left|\int_0^x th(t)dt\right| \leq \int_0^x Mtdt$

or $\int_0^x Mtdt = M\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x=\frac{Mx^2}{2}$ d'où $\left|\int_0^x th(t)dt\right| \leq \frac{Mx^2}{2}$

* Pour $x<0$; pour tout réel $t\in[x,0]$: $|h(t)|\leq M$ et $|t|=-t$

donc $\forall t\in[x,0]$: $|th(t)|\leq -Mt \Rightarrow \left|\int_0^x th(t)dt\right|=\left|\int_x^0 th(t)dt\right|\leq -\int_x^0 Mtdt$

or $-\int_x^0 Mtdt = M\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x=\frac{Mx^2}{2}$ d'où $\left|\int_0^x th(t)dt\right| \leq \frac{Mx^2}{2}$

Conclusion : $\forall x\in\mathbb{R}^*$; $\left|\int_0^x th(t)dt\right| \leq \frac{Mx^2}{2}$

b) On a : $\forall x\in\mathbb{R}^*$; $\left|\int_0^x th(t)dt\right| \leq \frac{Mx^2}{2} \Rightarrow \frac{2}{|x|}\left|\int_0^x th(t)dt\right| \leq \frac{Mx^2}{|x|}$

$\Rightarrow \left|\int_0^x \frac{2}{x}th(t)dt\right| \leq M|x|$ donc $\forall x\in\mathbb{R}^*$; $\psi(x)\leq M|x|$ or

$\lim\limits_{x\to 0} M|x|=0$ d'où $\lim\limits_{x\to 0}\psi(x)=0$ si $h(0)=0$ alors $\lim\limits_{x\to 0}\psi(x)=\psi(0)$

ce qui prouve que ψ est continue en 0.

2°/ a) $h(t)=\sin^2 t \Rightarrow \begin{cases}\psi(x)=\dfrac{2}{x}\displaystyle\int_0^x t\sin^2 t\,dt & \text{si } x\neq 0\\ \psi(0)=0\end{cases}$

on a : $\forall t\in\mathbf{R}$: $\sin^2 t=\dfrac{1-\cos 2t}{2}$

donc $\displaystyle\int_0^x t\sin^2 t\,dt=\int_0^x\left(\frac{t}{2}-\frac{t\cos 2t}{2}\right)dt=\frac{1}{2}\int_0^x t\,dt-\frac{1}{2}\int_0^x t\cos 2t\,dt$

$*\ \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^x t\,dt=\left[\frac{t^2}{4}\right]_0^x=\frac{x^2}{4}$

*Intégrons par parties : $\displaystyle\int_0^x t\cos 2t\,dt$

Posons $\begin{cases}u'(t)=\cos 2t\\ v(t)=t\end{cases}$ et $\begin{cases}u(t)=\dfrac{1}{2}\sin 2t\\ v'(t)=1\end{cases}$ d'où

$\displaystyle\int_0^x t\cos 2t\,dt=\frac{1}{2}\left[t\sin 2t\right]_0^x-\frac{1}{2}\int_0^x\sin 2t\,dt=\frac{1}{2}x\sin(2x)+\frac{1}{4}\left[\cos 2t\right]_0^x$

$=\dfrac{1}{2}x\sin(2x)+\dfrac{1}{4}\cos 2x-\dfrac{1}{4}$

on obtient alors : $\displaystyle\int_0^x t\sin^2 t\,dt=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}x\sin(2x)-\frac{1}{8}\cos(2x)+\frac{1}{8}$

donc $\begin{cases}\psi(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}\sin(2x)-\dfrac{1}{4x}\cos(2x)+\dfrac{1}{4x} & \text{si } x\neq 0\\ \psi(0)=0\end{cases}$

b) On a : $h(0)=0$ donc d'après **C** - 1°/ b) ψ est continue en 0 d'où

$\lim\limits_{x\to 0}\psi(x)=0$. Il en résulte que : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+1-2x\sin 2x-\cos 2x}{4x}=0$

Solution 4 :

A- 1°/ a) φ est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$:

$\varphi'(x) = e^x(2-x) - e^x = e^x(1-x)$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x - xe^x - 2 = -2$

x	$-\infty$		0		1		a		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\varphi(x)$	-2	$\nearrow$ (-)	0	$\nearrow$ (+)	$e-2$	$\searrow$ (+)	0	$\searrow$ (-)	$-\infty$

b)* φ est continue et strictement croissante sur $\left]-\infty,1\right]$ donc la restriction de φ sur $\left]-\infty,1\right]$ est une bijection de $\left]-\infty,1\right]$ sur $\left]-2,e-2\right]$ et comme $0 \in \left]-2,e-2\right]$ donc 0 admet un seul antécédent par cette bijection. En remarquant que φ (0)=0 donc l'équation φ (x)=0 admet 0 comme unique solution sur $\left]-\infty,1\right]$.

* De même, φ est continue et strictement décroissante sur $\left[1,+\infty\right[$ donc la restriction de φ sur $\left[1,+\infty\right[$ est une bijection de $\left[1,+\infty\right[$ sur $\left]-\infty,-2\right]$ ce qui prouve que l'équation φ (x)=0 admet une seule solution sur $\left[1,+\infty\right[$ or

$\varphi(1) = e-2$ et $\varphi(2) = -2 \Rightarrow \varphi(1).\varphi(2) < 0$.

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $1 < a < 2$

c) D'après le tableau des variations de φ on a :

* $\forall x \in \left]-\infty,0\right[\cup \left]a,+\infty\right[; \varphi(x) < 0$
* $\forall x \in \left]0,a\right[; \varphi(x) > 0$

2°/ a) * La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{e^x-1}$ est continue sur $\mathbf{R}^*$ comme quotient de deux fonctions continues sur $\mathbf{R}^*$

* ***Etudions la continuité de f en*** 0

* $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to0} x.\dfrac{1}{\dfrac{e^x-1}{x}} = 0.1 = 0$ car $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ ce qui entraîne que f est continue en 0 et par suite f est continue sur **R**.

b) La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{e^x - 1}$ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbf{R}^*$.

*** *Etudions la dérivabilité de f en* 0**

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{e^x - 1}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$ et par conséquent f est dérivable sur **R**.

$$* \; f'(x) = \frac{2x(e^x - 1) - e^x x^2}{(e^x - 1)^2} = \frac{x\left[2e^x - 2 - xe^x\right]}{(e^x - 1)^2} = \frac{x\varphi(x)}{(e^x - 1)^2}$$

c) on a : $\varphi(a) = 0 \Rightarrow e^a(2 - a) - 2 = 0 \Rightarrow e^a = \dfrac{2}{2 - a}$

or $f(a) = \dfrac{a^2}{e^a - 2}$ d'où $f(a) = \dfrac{a^2}{\frac{2}{2 - a} - 1} = a(2 - a)$

d) Le signe de $f'(x)$ est celui de $x\varphi(x)$.

x	$-\infty$		0		a		$+\infty$
$\varphi(x)$		-	0	+	0	-	
x		-	0	+		+	
$\varphi'(x)$		+	0	+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	a(2-a)	↘	0

$$* \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} = -\infty \text{ car } \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

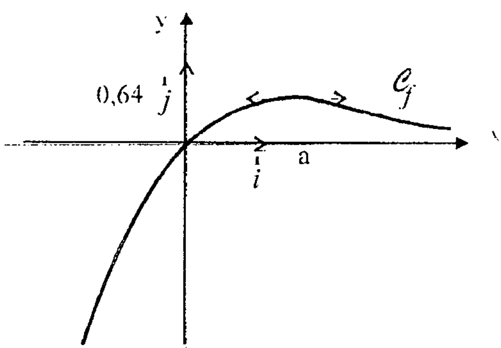
$$* \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}$$

$$\text{or } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{x} \right)^2 = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^X}{2X} \right)^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\text{d'où } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = 0 \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

*<u>Branche infinie au voisinage de</u> - ∞

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x - 1} = +\infty$ donc la droite des ordonnées est une direction asymptotique à au voisinage de - ∞



3°/ a) f est continue sur **R** et en particulier sur $\mathbf{R}_+$ donc F est définie sur $\mathbf{R}_+$

b) f est continue sur $\mathbf{R}_+$ donc F est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et $\forall x \in \mathbf{R}_+$: $F'(x) = f(x)$ or sur $\mathbf{R}_+$; $f(x) \geq 0$ donc F est strictement croissante sur $I = [0,+\infty[$.

c) F est continue et strictement croissante sur I donc $F(I)$ est l'intervalle :

$$F(I) = \left[F(0), \lim_{x\to+\infty} F(x) \right[= \left[0, \lim_{x\to+\infty} F(x) \right[$$

4°/ a) La fonction $t \mapsto t^2 e^{-t}$ est continue sur $\mathbf{R}_+$ donc G est définie sur $\mathbf{R}_+$.

b) Intégrons par parties : $\int_{Log2}^{x} t^2 e^{-t}\, dt$

Posons $\begin{cases} u'(t) = e^{-t} \\ v(x) = t^2 \end{cases}$ et $\begin{cases} u(t) = -e^{-t} \\ v'(x) = 2t \end{cases}$ d'où

$$G(x) = \left[-t^2 e^{-t}\right]_{Log2}^{x} + 2\int_{Log2}^{x} te^{-t}\,dt = -x^2 e^{-x} + \frac{1}{2}(Log2)^2 + 2\int_{Log2}^{x} te^{-t}\,dt$$

Faisons une intégration par parties pour : $\int_{Log2}^{x} te^{-t}\,dt$

Posons $\begin{cases} u'(t) = e^{-t} \\ v(t) = t \end{cases}$ et $\begin{cases} u(t) = -e^{-t} \\ v'(t) = 1 \end{cases}$

d'où $\int_{Log2}^{x} te^{-t}\,dt = \left[-te^{-t}\right]_{Log2}^{x} + \int_{Log2}^{x} e^{-t}\,dt = -xe^{-x} + \frac{1}{2}Log2 - \left[e^{-t}\right]_{Log2}^{x}$

$$= -xe^{-x} + \frac{1}{2}Log2 + \frac{1}{2}$$

donc $G(x) = -x^2 e^{-x} + \frac{1}{2}(Log2)^2 - 2xe^{-x} + Log2 - 2e^{-x} + 1$

$$= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + 1 + Log2 + \frac{1}{2}(Log2)^2$$

* on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} -2e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} -2e^{X} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} -2xe^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} 2Xe^{X} = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} -x^2 e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} -x^2\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 = \lim_{X\to+\infty} -4\left(Xe^{-X}\right)^2 = 0 \quad (X = -\frac{x}{2})$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) = 0$ et par suite $G(x)$ admet une limite en $+\infty$

qui est : $1 + Log2 + \frac{1}{2}(Log2)^2$

c) Il suffit de montrer que $\forall t \in [Log2, +\infty[: f(t) - 2t^2 e^{-t} \le 0$

$$f(t) - 2t^2 e^{-t} = t^2\left(\frac{1}{e^t - 1} - 2e^{-t}\right) = e^{-t}t^2\left(\frac{e^t}{e^t - 1} - 2\right) = \frac{e^{-t}t^2}{e^t - 1}(2 - e^t) \text{ d'où}$$

$\forall t \in [Log2, +\infty[$ on a $f(t) \le 2t^2 e^{-t}$

* on a : $\forall t \in [Log2,+\infty[: f(t) \leq 2t^2e^{-t}$ donc $\forall x > Log2$:

$$\int_{Log2}^{x} f(t)dt \leq 2\int_{Log2}^{x} t^2e^{-t} = 2G(x)$$

* D'autre part en utilisant la relation de chasle sur les intégrales on obtient :

$$F(x) = \int_0^{Log2} f(t)dt + \int_{Log2}^{x} f(t)dt = F(Log2) + 2G(x)$$

or $G(x)$ admet une limite finie en $+\infty$ donc il existe un réel $k > 0$ tel que $\forall x \in \mathbf{R}_+ : 2G(x) \leq k$ .Il en résulte que :

* pour $x \leq Log2$; $F(x) \leq F(Log2)$ (car F est croissante sur $\mathbf{R}_+$)

* pour $x > Log2$; $F(x) \leq F(Log2) + k$

Il suffit de prendre $M = F(Log2) + k > 0$

d) on a $\forall x \in \mathbf{R}_+$: $F(x) \leq M$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \leq M$

B - 1°/ a) Pour tout réel $x > 0$ le réel : $e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + ... + e^{-nx}$ est la somme de n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme e^{-x} et de raison $e^{-x} \neq 1$.

donc $e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + ... + e^{-nx} = e^{-x}\dfrac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}} = \dfrac{1-e^{-nx}}{e^x - 1}$

d'où $\dfrac{1}{e^x-1} = e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + ... + e^{-nx} + \dfrac{e^{-nx}}{e^x-1}$

b) D'après le tableau des variations de f on a :

$\forall x \in \mathbf{R}_+ \; 0 \leq f(t) \leq a(2-a) \Rightarrow 0 \leq f(t)e^{-nt} \leq a(2-a)e^{-nt}$

En intégrant sur $[0, x]$ on obtient :

$$0 \leq \int_0^x f(t)e^{-nt}dt \leq a(2-a)\int_0^x e^{-nt}dt$$

or $\displaystyle\int_0^x e^{-nt}dt = \left[\frac{e^{-nt}}{-n}\right]_0^x = \frac{e^{-nx}-1}{-n} = \frac{1-e^{-nx}}{n}$

de plus $\forall x \in \mathbf{R}_+$: $\dfrac{1-e^{-nx}}{n} \leq \dfrac{1}{n}$ et par suite : $0 \leq \displaystyle\int_0^x f(t)e^{-nt}dt \leq \frac{a(2-a)}{n}$

c) Faisons une intégration par parties :

Posons $\begin{cases} u'(t) = e^{-nt} \\ v(t) = t^2 \end{cases}$ et $\begin{cases} u(t) = -\dfrac{e^{-nt}}{n} \\ v'(t) = 2t \end{cases}$

d'où : $I_n(x) = \left[-\dfrac{t^2 e^{-nt}}{n} \right]_0^x + \dfrac{2}{n} \int_0^x te^{-nt}\, dt$

Posons $\begin{cases} u'(t) = e^{-nt} \\ v(t) = t \end{cases}$ et $\begin{cases} u(t) = -\dfrac{e^{-nt}}{n} \\ v'(t) = 1 \end{cases}$

d'où : $\int_0^x te^{-nt}\, dt = \left[-\dfrac{te^{-nt}}{n} \right]_0^x + \dfrac{1}{n} \int_0^x e^{-nt}\, dt = -\dfrac{xe^{-nx}}{n} - \dfrac{1}{n^2} \left[e^{-nt} \right]_0^x$

$$= -\frac{xe^{-nx}}{n} - \frac{1}{n^2}(e^{-nx} - 1)$$

donc $I_n(x) = -\dfrac{x^2 e^{-nx}}{n} - \dfrac{2xe^{-nx}}{n^2} - \dfrac{2}{n^3}(e^{-nx} - 1)$

$$= -\frac{e^{-nx}}{n^3}(n^2 x^2 + 2nx + 2) - \frac{2}{n^3}$$

d) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-e^{-nx}}{n^3}(n^2 x^2 + 2nx + 2) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{n^3}(-(n^2 x^2)e^{-nx} + 2(nx)e^{-nx} + 2e^{-nx}) = 0$ car :

* $\lim\limits_{x \to +\infty} (n^2 x^2)e^{-nx} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(nxe^{\frac{-nx}{2}} \right)^2 = \lim\limits_{x \to +\infty} (-2Xe^X)^2 = 0$ ($X = \dfrac{-nx}{2}$)

* $\lim\limits_{x \to +\infty} -2(nx)e^{-nx} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2Xe^X = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} I_n(x) = \dfrac{2}{n^3}$

2°/ a) d'après **B-** 1°/ a) on a $\forall t > 0$;

$\dfrac{1}{e^t - 1} = \sum\limits_{k=1}^{n} e^{-kt} + \dfrac{e^{-nt}}{e^{-t} - 1} \Rightarrow \dfrac{t^2}{e^t - 1} = \sum\limits_{k=1}^{n} t^2 e^{-kt} + \dfrac{t^2 e^{-nt}}{e^{-t} - 1} \Rightarrow$

$f(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} t^2 e^{-kt} + f(t)e^{-nt}$

Cette égalité reste vraie pour $t=0$ donc $\forall t \in \mathbf{R}_+$, $f(t) = \sum_{k=1}^{n} t^2 e^{-kt} + f(t)e^{-nt}$

$\Rightarrow F(x) = \sum_{k=1}^{n} I_k(x) + \int_0^x f(t)e^{-nt}\,dt$ ce qui donne que

$\forall x \in \mathbf{R}_+$ on a : $\sum_{k=1}^{n} I_k(x) = F(x) - \int_0^x f(t)e^{-nt}\,dt$

* $\forall x \in \mathbf{R}_+$ on a : $H_n(x) = F(x) - \sum_{k=1}^{n} I_k(x)$ or on a montré que

$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = L$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} I_k(x) = \frac{2}{k^3}$ donc $H_n(x)$ admet une limite l_n, lorsque

x tend vers $+\infty$ vérifiant : $l_n = L - \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^3}$

d'où $L - l_n = 2(1 + \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n^3})$

b) D'après **B-** 1°/ b) pour chaque entier $n \geq 1$ on a :

$\forall x \in \mathbf{R}_+ : 0 \leq \int_0^x f(t)e^{-nt}\,dt \leq \frac{a(2-a)}{n} \Rightarrow 0 \leq H_n(x) \leq \frac{a(2-a)}{n}$

d'où $0 \leq \lim\limits_{x \to +\infty} H_n(x) \leq \frac{a(2-a)}{n}$ ce qui entraîne que pour chaque entier $n \geq 1$

on a : $0 \leq l_n \leq \frac{a(2-a)}{n}$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a(2-a)}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} l_n = 0$

c) On vient de montrer que

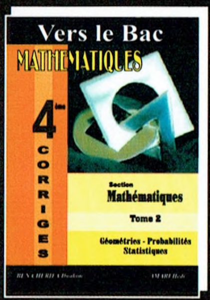
$\forall n \in \mathbf{N}^*$; $L - l_n = 2(1 + \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n^3}) \Rightarrow U_n = \frac{1}{2}(L - l_n)$ or

$\lim\limits_{n \to +\infty} l_n = 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \frac{1}{2} L = L' \Rightarrow L = 2L'$.

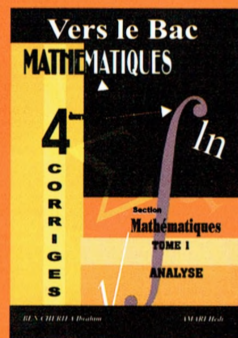
TABLE DES MATIERES

❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋

COLLECTION
Vers le Bac



Rappels de Cours
Exercices types
Solutions bien rédigées



Dans la même Collection

Physique Chimie	**1ère Année**
Physique Chimie	**2ème Année (toutes sections)**
Physique Chimie	**3ème Année (toutes sections)**
Physique Chimie	**4ème Année (toutes sections)**
Mathématiques	**1ère Année**
Mathématiques	**2ème Année (toutes sections)**
Mathématiques	**3ème Année (toutes sections)**

9 789973 316462

PRIX : 7,500